OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICA 1998

Primera Parte
22 de Agosto de 1998

Problema 1

A cada número natural n menor que 100, se le resta la suma de los cuadrados de sus dos dígitos . ¿Para qué valores de n esta diferencia es máxima?.

Problema 2

En un triángulo ABC, isósceles y rectángulo en B, se toma un punto D en la hipotenusa y se proyecta perpendicularmente en los punto E y F de los catetos AB y BC, respectivamente; dividiendo así al triángulo ABC en los triángulos AED, DFC y el rectángulo $EBFD$. Si cada cateto mide a, demostrar que al menos una de las áreas de estas tres figuras de división es mayor o igual que $2a^2/9$.

Problema 3

Un año normal tiene 365 días. Un año bisiesto tiene 366 días, siendo un año bisiesto un año divisible por 4, excepto aquellos que siendo divisibles por 100 no lo son por 400 (por ejemplo 1900 no fue bisiesto, pero el año 2000 si lo será). Recordando que hoy es el sábado 22 de Agosto de 1998, ¿qué día de la semana fue el 18 de Septiembre de 1810?

Segunda Parte
22 de Agosto de 1998

Problema 4

Miriam invitó a nueve niños y ocho niñas para su fiesta de cumpleaños. Su mamá preparó poleras con los números del 1 al 18 y se las repartió a todos los participantes de la fiesta. Durante un baile, la mamá observó que la suma de los números de cada pareja era un cuadrado perfecto. ¿Cómo estaban conformadas las nueve parejas?.

Problema 5

Sea H el punto donde se intersectan las alturas de un triángulo ABC. Demostrar que el ángulo formado por los radios de las circunferencias de diámetro AH y BC en sus puntos de intersección es un ángulo recto.

Problema 6

¿De cuántas maneras pueden fotografiarse 10 personas, sentadas en una fila, de modo que cuatro de ellas a, b, c y d queden siempre en el mismo orden relativo (es decir, que a siempre esté a la izquierda de b, que b siempre esté a la izquierda de c y que c esté siempre a la izquierda de d) ?.

Problema 7

Encontrar un número que sea divisible por 1998 y tal que la suma de sus dígitos al escribirlo en el sistema decimal sea igual a 1998.

PRUEBA FINAL
Primera Parte
5 de Noviembre de 1998

Problema 1

Encontrar todos los pares de números naturales a, b, con $a < b$, tales que la suma de los naturales mayores que a y menores que b sea igual a 1998.

Problema 2

Dada una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, con $AB = 2r$, se considera una cuerda variable CD, pero de longitud fija c. Sea E el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ y sea F el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

i) Demostrar que la recta $\overleftrightarrow{EF}$ es perpendicular con la recta $\overleftrightarrow{AB}$;

ii) Determinar el lugar geométrico del punto E;

iii) Demostrar que el trazo $\overline{EF}$ es de longitud constante y expresar dicha longitud en términos de c y r.

Problema 3

Evaluar

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Segunda Parte

Problema 4

Demostrar que para cualquier real no negativo x, se cumple:

$$x^{3/2}+6x^{5/4}+8x^{3/4}\geq 15x\,.$$

Determinar todos los x para los cuales se cumple la igualdad.

Problema 5

Demostrar que el número 3 puede escribirse de una infinidad de maneras diferentes como la suma de los cubos de cuatro enteros.

Problema 6

Dado un triángulo equilátero, cortarlo en cuatro figuras poligonales de manera que, reemsambladas adecuadamente, estas figuras formen un cuadrado.

Problema 7

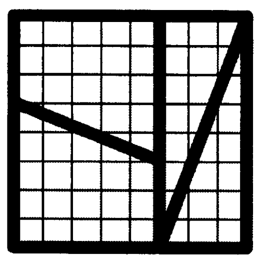
Al lanzar dos dados normales, el conjunto de resultados posibles de la suma de los puntos es $\{2,3,3,4,4,4,\ldots,11,11,12\}$. Observe que esa secuencia puede obtenerse de la identidad:

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\,(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)=x^2+2x^3+3x^4+\cdots+2x^{11}+x^{12}\,.$$

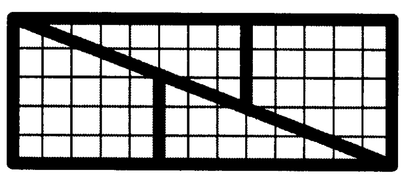
Diseñar un par de "dados locos", es decir, otros dos cubos, no necesa- riamente iguales, con un número natural indicado en cada cara, tales que el conjunto de resultados posibles de las suma de sus puntos sea igual al de dos dados normales.

Un Problema Geométrico

Considere la siguiente figura



cortamos la figura por las lineas gruesas y la rearmamos del siguiente modo



Como es fácil ver el cuadrado original de la primera figura tiene 8×8 cuadraditos, por lo tanto su área es 64 unidades, al hacer los cortes y pegarlos como se indica en la segunda figura obtenemos un rectángulo de 13×5 cuadraditos, por lo tanto su área es 65 unidades. ¿Puede explicar esto?.