Una Versión Elemental del Método de Newton para Ecuaciones Polinomiales

José Paulo Q. Carneiro[1]

Introducción

La historia de resolución de ecuaciones polinomiales $c_n\, x^n + \cdots + c_1\, x + c_0 = 0$ pasa por distintas etapas. Después que un grupo de italianos (Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari) del siglo XVI descubrieron las fórmulas para expresar las raíces de las ecuaciones del tercer y cuarto grado en función de sus coeficientes, los matemáticos trataron de descubrir fórmulas análogas para ecuaciones de grado superior al cuarto. Pero en el pasaje del siglo XVIII para el siglo XIX, Ruffini, Abel y Galois probaron que eso era imposible.

A partir de entonces, los matemáticos pasaron a valorar los llamados métodos numéricos para resolución de ecuaciones polinomiales. Partiendo desde un punto de vista completamente distinto, la idea ahora es determinar una sucesión de valores aproximados para las raíces de la ecuación, de forma que sea posible obtenerlas con cualquier grado de aproximación que se desee. Este tipo de método ya era utilizado con éxito, por ejemplo, por Newton (1642-1727), y se aplica incluso a ecuaciones transcendentes.

Los métodos numéricos todavía no han ocupado el lugar que merecen en la Matemática elemental. Aparentemente, esto ocurre por tres razones.

La primera es que muchas personas no se sienten satisfechas en obtener valores "aproximados", en lugar de una respuesta "exacta". En realidad, esto es un tanto ilusorio. Para muchos fines, una respuesta "exacta" tal como $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{2}}$ sólo será útil si, a su vez, aproximamos las raíces cúbicas, cuartas, etc., por valores racionales obtenidos a través de métodos también "numéricos".

Otra razón alegada es que los métodos numéricos "son demasiado trabajosos". Este tipo de argumento podía tener algún sentido hasta hace poco tiempo, antes de las calculadoras electrónicas y de las computadoras. Hoy en

[1]Universidad Santa Ursula, Rio de Janeiro.

día, al revés, los métodos numéricos ponen en las manos de los profesores de Matemática una oportunidad excelente para introducir sus alumnos en problemas realistas, y para hacerlos trabajar matemáticamente con la computadora, esta compañera cada vez más inseparable del profesional del entrante siglo XXI.

La tercera razón alegada es que los métodos numéricos presuponen el conocimiento de ciertas nociones de Cálculo Diferencial, imposibilitando su introducción a nivel elemental. Lo que proponemos en este artículo es que el método de Newton, que por su sencillez y eficiencia, es el método numérico más utilizado para la resolución de ecuaciones en general, puede ser presentado para ecuaciones polinomiales en una versión elemental que no usa ni la noción ni el cálculo de derivadas. Es notable que Newton haya inventado en 1669 su método para resolver una ecuación del tercer grado, por un razonamiento donde la derivada aparece naturalmente, y sin necesidad de su definición como límite. Es por lo tanto un tema perfectamente abordable a nivel elemental.

El método

Para entender el método de Newton, vamos a tomar primero la ecuación general de tercer grado $p(x) = c_3\, x^3 + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0 = 0$ y proceder de la siguiente forma:

1) Se divide $p(x)$ por $x - x_0$, obteniendo un cuociente $q_1(x)$, de segundo grado, y un resto $A_0 = p(x_0)$.

2) Se divide $q_1(x)$ por $x - x_0$, obteniendo un cuociente $q_2(x)$, de primer grado, y un resto $B_0 = q_1(x_0)$.

3) Se divide $q_2(x)$ por $x - x_0$, obteniendo un cuociente $q_3(x)$, de grado cero, y un resto $D_0 = q_2(x_0)$.

Todo esto puede ser hecho de modo simple, a través del conocido dispositivo de Briot-Ruffini-Horner (BRH), como ilustra el esquema:

$$\begin{array}{c|cccc} & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ \hline x_0 & c_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ x_0 & c_3 & B_1 & B_0 & \\ x_0 & c_3 & D_0 & & \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rclrclrcl} A_2 & = & x_0c_3 + c_2\,, & A_1 & = & x_0A_2 + c_1\,, & A_0 & = & x_0A_1 + c_0\,, \\ B_1 & = & x_0c_3 + A_2\,, & B_0 & = & x_0B_1 + A_1\,, & D_0 & = & x_0c_3 + B_1\,. \end{array}$$

Las divisiones efectuadas implican que

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & (x - x_0)q_1(x) + A_0 \\ q_1(x) & = & (x - x_0)q_2(x) + B_0 \\ q_2(x) & = & (x - x_0)q_3(x) + D_0 \end{array}$$

donde se nota que $q_3(x) = c_3$. Substituyendo cada resultado en el precedente

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & (x - x_0)((x - x_0)q_2(x) + B_0) + A_0 \\ & = & (x - x_0)^2q_2(x) + B_0(x - x_0) + A_0 \\ & = & (x - x_0)^2((x - x_0)q_3(x) + D_0) + B_0(x - x_0) + A_0 \\ & = & (x - x_0)^3q_3(x) + D_0(x - x_0)^2 + B_0(x - x_0) + A_0 \\ & = & c_3(x - x_0)^3 + D_0(x - x_0)^2 + B_0(x - x_0) + A_0 \qquad (1) \end{array}$$

Vamos a suponer ahora que x_0 sea una aproximación inicial de una raíz real de la ecuación $p(x) = 0$. Queremos obtener otra aproximación $x_1 = x_0 + h$, posiblemente mejor que x_0. Como debemos tener $p(x_1) = 0$, entonces, substituyendo x por $x_1 = x_0 + h$ en la ecuación (1), se obtiene $c_3h^3 + D_0h^2 + B_0h + A_0 = 0$. La idea de Newton ha sido que, si x_0 está suficientemente próximo de la raíz exacta, h es muy pequeño y por lo tanto, para una aproximación razonable, se puede despreciar los términos en h^2 y h^3, quedando con la ecuación de primer grado aproximada $B_0h + A_0 \approx 0$, de donde se obtiene $h \approx -A_0/B_0$. Esto sugiere que se tome como segunda aproximación de la raíz

$$x_1 = x_0 - \frac{A_0}{B_0}$$

A partir de allí, se puede formar un proceso iterativo, calculando $x_2 = x_1 - A_1/B_1$, donde A_1 y B_1 son calculados a partir de x_1 del mismo modo que A_0 y B_0 han sido calculados a partir de x_0, y así sucesivamente.

El método de Newton para encontrar una raíz real de la ecuación polinomial $p(x) = 0$, puede entonces ser resumido así

(1) Seleccione una aproximación inicial x_0 para la raíz.

(2) Para $n = 0, 1, \ldots$, use BRH para dividir $p(x)$ dos veces por $x - x_n$, obteniendo los restos A_n y B_n.

(3) Tome entonces $x_{n+1} = x_n - A_n/B_n$.

Ejemplo La ecuación $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 7 = 0$ tiene una raíz entre 2 y 3, ya que $p(2) = -9 < 0$, mientras que $p(3) = 5 > 0$. Iniciando el proceso con $x_0 = 3$

	2	−5	1	−7
3	2	1	4	5
3	2	7	25	

De aquí que $x_1 = x_0 - A_0/B_0 = 3 - 5/25 = 2.8$. Se retoma el proceso con este valor

	2	−5	1	−7
2.8	2	0.6	2.68	0.504
2.8	2	6.2	20.04	

Por lo tanto, $x_2 = x_1 = A_1/B_1 = 2.8 - 0.504/20.04 = 2.774850$, y el proceso sigue

	2	-5	1	-7
2.774850	2	0.549701	2.525337	0.007432
2.774850	2	6.099401	19.450262	

El lector puede confirmar que x_3 = 2.7744850 - 0.007432/19.450262 = 2.774468 ya da la raíz con seis decimales exactos, confirmando la gran velocidad de convergencia del método.

Si hubieramos empezado con el valor $x_0 = 2$, habríamos obtenido una convergencia mucho más lenta, como se puede ver en el siguiente cuadro

n	x_n (con $\mathrm{x}_0 = 2$)	x_n (con $\mathrm{x}_0 = 3$)
0	2.000000	3.000000
1	3.800000	2.800000
2	3.108139	2.774850
3	2.826305	2.774468
4	2.776010	2.774468
5	2.774470	2.774468
6	2.774468	2.774468

Este ejemplo ilustra el hecho de que la velocidad de convergencia (y hasta la propia convergencia) del método de Newton depende de los coeficientes de la ecuación y del valor inicial escogido x_0. Una discusión más detallada de estos fenómenos puede ser encontrada en libros de Análisis Numérico. En la práctica, a nivel elemental, cuando aparezca algún problema en la aplicación del método de Newton, se sugiere que se pruebe otro valor inicial.

Comentarios

(1) La selección del valor inicial está fundamentada en los diversos procesos de "localización de las raíces". Para ecuaciones polinomiales en un nivel elemental, creemos que es suficiente hacer pruebas con una calculadora hasta encontrar dos valores donde el polinomio tenga valores con signos contrarios.

(2) Aunque el ejemplo estudiado sea el de una ecuación del tercer grado, el método se aplica a ecuaciones de cualquier grado.