Poliedros Arquimedianos

María Luz Zuñiga Pallavicino[1]

Algunos Conceptos Previos

Ángulos Diedros

Definición Se llama *ángulo diedro* a la figura formada por dos semi-planos que tienen en común una arista, pero pertenecen a distintos planos.

Los dos semi-planos son las *caras del diedro*, y su intersección es la *arista del diedro.*

El ángulo diedro de la figura 1 se denota por $P - AB - Q$, o simplemente, si no hay posibilidad de ambiguedad, como el diedro AB

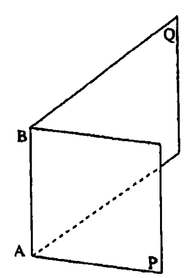


FIGURA 1

Definición *Ángulo plano o ángulo rectilíneo del diedro* es el ángulo formado por dos rayos trazados, uno en cada cara del diedro,perpendiculares a la arista y con origen común en dicha arista. La medida del diedro es igual a la medida del ángulo plano correspondiente.

Teorema 1 *Dos diedros son iguales si, y sólo si tienen ángulos planos congruentes.*

Demostración. La medida del diedro AB =3D medida del $\angle\alpha$ y la medida del

[1]Departamento de Matemáticas Universidad Católica del Norte, casilla 1280, Antofagasta, Chile.

diedro CD =3D medida del $\angle\beta$. Tenemos, $AB = CD \Rightarrow \angle\alpha \approx \angle\beta$ por otra parte: $\angle\alpha \approx \angle\beta$ luego medida $\angle\alpha$ = medida $\angle\beta$ por lo tanto $AB = CD$.

Definición Se llama *plano bisector de un diedro*, al semi-plano que divide al diedro en dos diedros iguales. (Es el equivalente a la bisectriz de un ángulo, en geometría plana).

Definición Un diedro es *recto, agudo u obtuso*, según si su ángulo plano es recto, agudo u obtuso, respectivamente.

Todas las propiedades de los ángulos planos son "heredadas" por los ángulos diedros.

Planos Perpendiculares

Definición Dos planos son perpendiculares, si forman un diedro recto.

Teorema 2 *Si dos planos forman un diedro recto, entonces forman cuatro diedros rectos.*

Demostración. Ya que los ángulos diedros heredan las propiedades de los ángulos planos, entonces, el diedro opuesto por la arista con el diedro recto, también es recto. Por otro lado, el diedro adyacente al diedro recto es suplementario con él, por lo tanto también es un diedro recto. Análogamente, el cuarto diedro se prueba que es recto, ya sea por diedros suplementarios o bien opuestos por la arista.

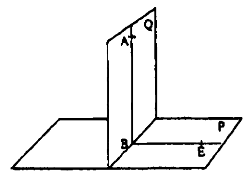
Teorema 3 *Dado un plano y una recta contenida en él, por dicha recta se puede trazar un único plano perpendicular al plano dado.*

Teorema 4 *Si una recta es perpendicular a un plano dado, entonces, todo plano que contenga a la recta es perpendicular al plano dado.*

Demostración. Sea P el plano dado y AB la recta perpendicular a P y Q el plano que contiene a AB. En el plano P se pasa por B la perpendicular BE a la recta $DC = P \cap Q$.

El $\angle ABE$ será recto, ya que la recta AB es por hipótesis, perpendicular al plano P; por lo tanto, este ángulo ABE es el ángulo plano del diedro

$P - CD - Q$. Luego este diedro es recto y por el Teorema 2, los planos P y Q son perpendiculares.



Teorema 5 *Si dos planos secantes, (no paralelos) P y Q, son perpendiculares a un plano R, entonces, la recta de intersección de P y Q es perpendicular al plano R.*

Ángulos Poliedros

Definición Se llama *ángulo poliedro o ángulo sólido*, a la porción del espacio limitada por la unión de tres o más ángulos planos y sus interiores, tales que todos tienen el vértice común, y dos a dos un lado común, y no son coplanares. (figura 2)

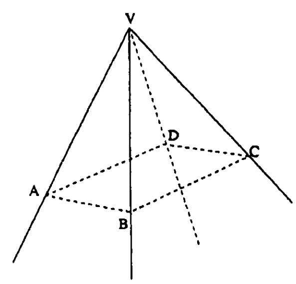


FIGURA 2

El vértice común recibe el nombre de *cúspide*, los interiores de los ángulos planos se llaman *caras* y los lados de los ángulos planos son las *aristas*. Además en todo ángulo poliedro hay ángulos diedros, entre dos caras adyacentes.

Entre los ángulos poliedros, el más conocido es el *triedro*, que tiene tres caras (ángulos planos), tres aristas y tres ángulos diedros.

Si usted está leyendo esto dentro de una habitación tradicional, con paredes y techo en ángulo recto, podrá observar en la intersección de dos de las paredes con el techo, un *triedro trirectángulo.*

Cuerpos Geométricos

Los cuerpos geométricos se dividen en dos grandes grupos: los *cuerpos poliedros* y los *cuerpos redondos*, los que a su vez se subdividen en diferentes tipos como se verá a continuación.

Cuerpos Poliedros

Definición Se llama *cuerpos poliedros* aquellos cuerpos limitados exclusivamente por superficies planas. Estas superficies planas se llaman *caras*, y son polígonos. La intersección de dos caras, recibe el nombre de *arista* y la intersección de tres o más aristas, recibe el nombre de *vértice.*

En un cuerpo poliedro hay ángulos planos, ángulos diedros y ángulos poliedros. Los cuerpos poliedros se pueden dividir en *poliedros convexos* y *poliedros no convexos o estrellados.*

Definición Un cuerpo geométrico es *convexo*, si al unir dos puntos cualesquiera de su interior, el segmento que los une queda integramente en el interior del cuerpo.

Los poliedros convexos se dividen a su vez en *poliedros regulares y poliedros irregulares.*

Poliedros Regulares o Platónicos

Son aquellos sólidos que tienen como caras polígonos regulares congruentes, que convergen en vértices que son ángulos sólidos congruentes, unidos por aristas de igual longitud.

Cada uno de estos poliedros regulares es inscriptible en una esfera y su número está limitado a cinco:

1. El *tetraededro regular*, con cuatro caras que son triángulos equiláteros.
2. El *hexaedro regular o cubo*, con *seis caras cuadradas.*
3. El *octaedro regular*, con ocho caras que son triángulos equiláteros.
4. EL *dodecaedro regular*, que tiene doce caras que son pentágonos regulares.

5. El *icosaedro regular*, cuyas caras son veinte triángulos equiláteros.

Poliedros Irregulares

Los poliedros irregulares son aquellos que no cumplen con alguna de las características de los poliedros regulares. En los textos de Geometría Elemental usualmente se les divide en *prismas* y *pirámides*.

En base a esta división de los cuerpos poliedros, salta la pregunta: ¿Y qué pasa con un cuerpo poliedro, que no sea regular, pero tampoco sea un prisma ni una pirámide?, ¿Existen otros tipos de cuerpos poliedros?

Efectivamente, los prismas y las pirámides no son los únicos poliedros no regulares que existen, en realidad, hay una amplia gama de poliedros irregulares que no estan en la clasificación de prismas, ni de pirámides. Un tipo interesante de estos poliedros lo forman los *poliedros semi-regulares o Arquimedianos.*

Poliedros Arquimedianos o Semi-Regulares

Se define a los *poliedros arquimedianos*, diciendo que son 13 cuerpos poliedros, inscriptibles en una esfera, cada uno de los cuales tiene por caras polígonos regulares de aristas congruentes, pero de dos o tres especies diferentes y cuyos ángulos sólidos son congruentes.

En estos poliedros, como en todos los poliedros convexos, se cumple la fórmula de Euler:

$$\text{número de vértices} + \text{número de caras} = \text{número de aristas} + 2$$

Una vez definidos estos poliedros, es interesante ver como se pueden obtener a partir de los cinco poliedros regulares.

a) Si se toma el punto medio de cada una de las aristas de los poliedros regulares, excepto el tetraedro, y se unen los puntos así determinados, se obtienen dos de los poliedros arquimedianos:

1.- El octaedro y el cubo, originan el mismo cuerpo, de doce vértices, con ocho caras triangulares y seis cuadradas. Este es el llamado *cuboctaedro* (figura 3).

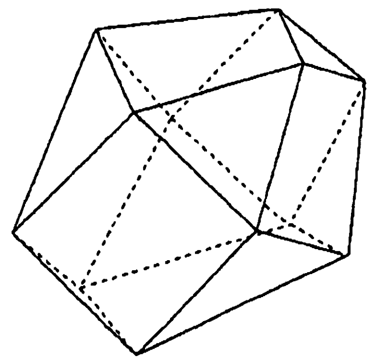


FIGURA 3

2.- El dodecaedro y el icosaedro producen un cuerpo arquimediano que consta de doce caras pentagonales y veinte triangulares y treinta vértices, el que recibe el nombre de *triakontágono.*

b) Si en vez de un punto, se toman dos puntos sobre cada arista de un poliedro regular, se obtienen otros cinco poliedros arquimedianos.

c) Repitiendo las dos operaciones anteriores en el cuboctaedro y el triakontágono, resultan cuatro cuerpos más.

Los once poliedros arquimedianos así obtenidos tienen tres o cuatro aristas que convergen en cada vértice. Los dos cuerpos que faltan tienen cinco aristas convergiendo en cada vértice, como ocurría con el icosaedro.

Los Trece Poliedros Arquimedianos

Los cuerpos número 2 y 3 se obtienen respectivamente, del cubo (o del octaedro) y del dodecaedro (o del icosaedro), y los números 8 y 9 se obtienen del 2 y 3, uniendo los puntos medios de sus aristas.

Los números 1, 4, 5, 6, 7, 10 y 11 se generan del tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro, dodecaedro, del 2 y del 3 (cuboctaedro y triakontágono) respectivamente, tomando 2 puntos sobre cada una de sus aristas y uniéndolos.

$N°$ de Vértices (Arist/Vértice)	$N°$ de Aristas	$N°$ y= Características de Caras
1- 12 (3 aristas)	18	4 cuadrados + 4 triángulos
2- 12 (4 aristas)	24	6 cuadrados + 8 triángulos
3- 30 (4 aristas)	60	12 petágonos + triángulos
4- 24 (3 aristas)	36	8 exágonos + 6 cuadrados
5- 24 (3 aristas)	36	6 octógonos + 8 triángulos
6- 60 (3 aristas)	90	20 exágonos + 12 pentágonos
7- 60 (3 aristas)	90	12 decágonos + 20 triángulos
8- 24 (4 aristas)	48	18 cuadrados + 8 triángulos
9- 60 (4 aristas)	120	12 pentágonos + 30 cuadrados + 20 triángulos
10- 48 (3 aristas)	72	6 octógonos + 8 exágonos + 12 triángulos
11- 120 (3 aristas)	180	12 decágonos + 20 exágonos + 30 cuadrados
12- 25 (5 aristas)	60	6 cuadrados + 32 triángulos
13- 60 (5 aristas)	150	12 pentágonos + 8 triángulos

De estos 13 poliedros arquimedianos, merecen especial mención dos de ellos, debido a sus propiedades geométricas.

(i) El *cuboctaedro* (figura 3), que tiene doce vértices, veinticuatro aristas, catorce caras, ocho de ellas triángulos equiláteros y seis cuadrados. Este cuerpo tiene la interesante propiedad de que su arista es igual al radio de la esfera circunscrita y, desde este punto de vista, corresponde, en el espacio, al hexágono regular que, como es sabido, goza de una propiedad análoga en el plano, su arista es igual al radio de la circunferencia circunscrita. El cuboactaedro tiene especial importancia en cristalografía.

(ii) El *octaedro truncado o tetrakaidecaedro*, (número 4) comúnmente llamado *poliedro de Lord Kelvin* (figura 4), tiene veinticuatro vértices, treintaiseis aristas y catorce caras, de las cuales seis son cuadrados u ocho hexágonos. Puede obtenerse trisectando todas las aristas de un octaedro. Los dos puntos que sirven para esta división, sobre cada arista, dan los vienticuatro vértices del poliedro de Lord Kelvin.

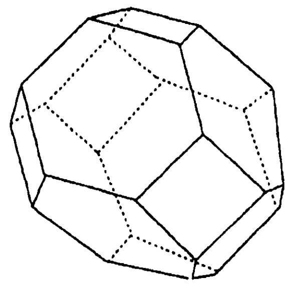


FIGURA 4

El poliedro de Lord Kelvin tiene la propiedad, única entre los trece arquimedianos y reservada al cubo entre los cuerpos platónicos, de poder, por repetición, compactar el espacio sin dejar vacíos. El hexágono tiene la propiedad correspondiente en el plano.

Poliedros Recíprocos de los Arquimedianos

A partir de los trece cuerpos arquimedianos, también se pueden construir los *poliedros recíprocos* de los poliedros arquimedianos, tomando como vértices los centros de cada una de sus caras.

Definición Dos poliedros son recíprocos si el número de sus lados es el mismo, el número de vértices de uno es igual al número de caras del otro; y el número de lados de una cara de uno, es igual al número de aristas que concurren al vértice correspondiente en el otro.

Estos trece poliedros recíprocos de los arquimedianos, no son inscriptibles en una esfera, ya que cada uno tiene por caras polígonos congruentes, pero no regulares. Los ángulos sólidos de los vértices son regulares, pero no congruentes.

Los nombres de estos poliedros recíprocos son pintorescos: *granatoedros, leucocitoedros, diamantoedros, giroedros, etc.*

De estos cuerpos, el que ofrece mayor interés es uno de los granatoedros, el *granatoedros octaédrico*, más comunmente llamado *rombododecaedro*, cuyas doce caras son rombos congruentes. (fig. 5)

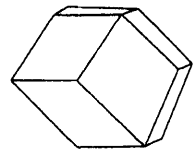


FIGURA 5

El rombododecaedro tiene la misma propiedad del poliedro de Lord Kelvin, es decir, de compactar el espacio por repetición, como ocurre con el rombo regular que en el plano tiene la propiedad análoga.

Existen además otros tipos de poliedros irregulares como; por ejemplo, los *poliedros cuasi-regulares*, los *deltaedros*, etc.

En general, sabemos que cualquier cuerpo geométrico limitado, exclusivamente, por caras planas, y que no sea uno de los cinco platónicos, será un poliedro irregular.

Referencias

1. Matila Ghyka. *Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes.* Poseidón, Buenos Aires 1953
2. Peter Pearce. *Structure in Nature is a Strategy for Design.* The M.I.T. Press. Cambridge Mass. 1983
3. Dan Pedoe. *La Geometría en el Arte.* Ed. Gustavo Gil, Barcelona, 1979

Nota sobre números Primos
Primos de Mersenne
Los primos de Mersenne son primos de la forma $2^p - 1$, por ejemplo, $3, 31$, $127, \ldots$. Para que $2^p - 1$ sea primo debemos tener que p es primo.
El mayor primo de Mersenne conocido es $2^{859433} - 1$ y fu'e descubierto en 1994.
El Mayor Primo conocido El mayor primo conocido es el primo de Mersenne escrito arriba. El mayor primo no Mersenne conocido es $391581 \cdot 2^{216193} - 1$.
A través de la historia, el mayor primo conocido ha sido casi siempre un primo de Mersenne.