Motivando las Matemáticas con el Ajedrez

Manuel Murillo Tsijli[1]

"Las matemáticas comparan los más diversos fenómenos y descubren las analogías secretas que los unen."

Joseph Fourier (1768-1830)

¿Cuál es el origen del ajedrez? No se sabe con certeza cual es su origen, en [6] se dan algunas de las leyendas que lo han motivado, sin embargo la más conocida de ellas [5] y que más me gusta por supuesto, es la del rey que ofrece, al que inventara un juego que le agrade, todo lo que éste quisiera. El inventor le dijo a su Rey que, como forma de pago, el quería tener suficiente trigo como para poner en la primera casilla un grano, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta y así sucesivamente, duplicando la cantidad de la casilla anterior hasta llegar al último de los escaques. El Rey ordenó inmediatamente que se hiciera el pago, llamó al matemático de la corte para que calculara el número de granos que debía entregar y este después de hacer algunos cálculos le dijo a su Rey: "Su Majestad, el número total de granos es:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{64} = 2^{65} - 1$$

y en todo el reino no hay suficiente trigo ni lo habrá con muchos siglos de cosechas, para satisfacer el pago". Este es un número de veinte dígitos en el sistema decimal y para efectuar el pago el Rey debería llenar de trigo un cubo con 7 kilómetros de arista.

La parte poco conocida de la leyenda es la forma en que el matemático, viendo en problemas de honor a su Rey, le salvo de esta situación. El le propuso al inventor que le pagarían lo que el pedía pero además lo que se obtuviera de agregar sin fin, más y más casillas al tablero. El inventor aceptó esta nueva forma de pago ya que sin duda obtendría una mayor cantidad de trigo, pero cuando hicieron los cálculos para ver la cantidad T de granos, se obtuvo que:

[1]Departamento de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Apartado 159–7050, Cartago, Costa Rica.

$$
\begin{aligned}
T &= 1+2+4+8+16+\cdots \\
T &= 1+2(1+2+4+8+16+\cdots) \\
T &= 1+2T
\end{aligned}
$$

y resolviendo la última ecuación obtenemos que $T=-1$, es decir ¡el inventor le quedaba debiendo un grano de trigo al Rey!. ¿Puede usted dar una explicación a esto?

Esta leyenda pone de manifiesto que desde sus inicios las matemáticas y el ajedrez estan relacionadas, esto lo vemos en múltiples ocasiones en la literatura, por ejemplo encontramos Reconstrucción y Probabilidad en [2], Geometría en [3], Álgebra Lineal en [4], Teoría de Números, Estadística, Álgebra y mucho más en [1]. Además se hacen competencias internacionales de resolución de problemas matemáticos en el ajedrez.

Se ha preguntado de cuántos movimientos es la partida más larga posible[2] o cuántas partidas distintas de ajedrez existen, sin analizar su calidad. Preguntas como estas han provocado gran discusión desde inicios de siglo, la aparición de los ordenadores o computadoras ha ayudado a responderlas. La partida más larga posible es de 5899 movimientos y $10^{18.900}$ es la cantidad de partidas diferentes $[1, p.18]$.

A pesar de que son números extraordinariamente grandes, algunos ajedrecistas han optado por sugerir ligeros cambios a las reglas que conocemos, esto con el fin de poner a prueba a la mente humana y por que no a las computadoras. El cubano y campeón mundial José Raúl Capablanca, sugería cambiar el tablero de 8×8 por uno de 10×10, otros intercambiar de posición el alfil y el caballo, pero de los que más aceptación han tenido es el denominado ajedrez CIRCE[3], en donde las piezas que son comidas se colocan en su casilla de origen, es decir, las piezas no desaparecen del tablero, en esta modalidad las posibilidades de movimiento se incrementan demasiado y la solución de problemas se convierte en un verdadero dolor de cabeza. Desde sus origenes ya el ajedrez ha sufrido cambios, el enroque, el peón al paso, los movimientos del alfil y de la dama entre otros. Particularmente creo que más cambios como estos se harán tarde o temprano, porque el ajedrez como arte que es [3], al

[2]Tomando en cuenta que es tabla, si se repite tres veces la misma posición.

[3]De la mitología griega, hija del Sol y de la oceánida Perse, preparaba venenos capaces de convertir a los hombres en animales. En la Odisea convierte a algunos compañeros de Ulises en cerdos.

igual que la música y la pintura, va creciendo y madurando.

Grandes matemáticos como Georg Pólya, Lindelöf, Carl Gauss, L. Euler, Landau y Donald E. Knuth, entre otros, se han interesado por problemas matemáticos en el ajedrez. Un problema que ha motivado muchos estudios es el de encontrar la mínima cantidad de piezas del mismo tipo, de manera que cubran todo el tablero, o el de el número máximo de piezas del mismo tipo que se pueden colocar sin que se protejan entre ellas, estos en un tablero de 8×8 ó de otro tamaño. Probablemente, usted como aficionado alguna vez ha tratado de resolver este problema para el caso de colocar 8 damas en el tablero sin que se protejan entre ellas y ha encontrado alguna de las 92 soluciones. El gran matemático alemán Carl F. Gauss, el genio más grande de la era moderna, se interesó por el "problema de las 8 damas" y descubrió solamente 72. Todas estas soluciones se obtienen de 12 ubicaciones básicas, por rotaciones y reflexiones. Leonard Euler, el más prolífico y gran matemático suizo del siglo pasado se planteó y resolvió el "problema del movimiento del caballo" que dice así: andar con el caballo por todas las casillas del tablero sin estar dos veces en ninguna de ellas. Otro problema, bastante sencillo pero interesante, conocido como el "del rey intangible" dice: ¿puede la dama blanca en ayuda de su rey, que tiene prohibido moverse, dar mate al rey enemigo solitario? Muchos ajedrecistas dijeron que no, pero el matemático Landau descubrió que se puede si el rey blanco intangible está ubicado en una de las casillas c3, c6, f3 ó f6 con la dama blanca y el rey negro en cualquier casilla, en no más de 23 movimientos.

Un problema que atrajo la atención es el de encontrar el recorrido máximo del caballo en un tablero de $n \times n$ sin que estos se crucen, Knuth encontró que hay dos en el tablero de orden 3, cinco en el de orden 4, cuatro en el de 5, uno en el de 6, catorce en el de 7, y cuatro en el de 8, en la figura 1 se muestra el recorrido máximo y único en el tablero de 6×6, que es de 17 movimientos.

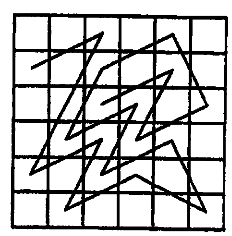

Figura 1. Recorrido máximo del caballo en tablero 6×6

El matemático inglés Stephen J. Turner dijo: "Quien sólo haya hecho ejercicios de matemáticas sin haber resuelto ningún problema, es igual a quien sabe mover las piezas del ajedrez sin haber jugado nunca un verdadero juego; lo real en matemáticas es participar en el juego". Y no es de extrañar que grandes matemáticos hallan sido grandes ajedrecistas, Adolf Anderssen fue profesor de matemática y campeón del mundo sin corona, Wilhelm Steinitz fue distinguido estudiante de matemática y campeón 1896 a 1904, Emanuel Lasker campeón de 1904 a 1921 y Max Euwe campeón de 1935 a 1937 ambos Doctores en Matemática, Mikhail Botvinnik y muchos más fueron ingenieros con buena formación en matemática y más recientemente vemos a J. Nunn, J. Speelmann y E. Guik entre otros. Así mismo en la Olimpíada Costarricense de Matemática del año 1996, tres ajedrecistas tuvieron una brillante participación; Fabián Carballo medalla de bronce, Gustavo Madrigal medalla de plata y Mauricio Chicas medalla de oro.

El ajedrez ha sido una fuente de problemas matemáticos, en la Olimpíada Húngara de Matemática del año 1926 se planteó el siguiente problema: "Pruebe que, si a y b son enteros dados, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+2z+2t &= a \\ 2x-2y+z-t &= b \end{aligned}$$

tiene soluciones enteras para x, y, z y t". Con un poco de ayuda del álgebra se obtienen las soluciones $x = a - b$, $y = -b$, $z = -a + b$ y $t = a$, que se pueden verificar por simple sustitución, los detalles de esta solución se pueden ver en [4]. Mas que la solución, me interesa ver de donde nace este problema. Suponga que se tiene un tablero infinito de ajedrez, como el del desesperado Rey, sobre este tablero sobreponemos un plano cartesiano de manera que cada par ordenado (a, b), con a y b enteros, se encuentre en el centro de cada escaque. Si llamamos a $(0,0)$ como el origen del sistema podemos ver que los 8 movimientos posibles del caballo, a partir del origen, se pueden representar por:

$$\begin{array}{llll} u_1=(1,2), & u_2=(1,-2), & u_3=(2,1), & u_4=(2,-1) \\ -u_1=(-1,-2), & -u_2=(-1,2), & -u_3=(-2,-1), & -u_4=(-2,1) \end{array}$$

u_i y $-u_i$ son opuestos en el sentido de que si movemos y retrocedemos, llegamos de nuevo al origen. En este sentido, efectuar x veces el movimiento u_1 se representa por $(x, 2x)$, efectuar y veces el movimiento u_2 se representa por $(y, -2y)$, efectuar z veces el movimiento u_3 se representa por $(2z, z)$ y efectuar t veces el movimiento u_4 se representa por $(2t, -t)$, así al efectuar todos los movimientos juntos se obtiene de la suma vectorial y se puede representar como

$(x + y + 2z + 2t, 2x - 2y + z - t)$ y las soluciones del sistema de ecuaciones, describen los movimientos para llegar con el caballo al escaque (a, b), es decir, se prueba que el caballo puede visitar todas las casillas del tablero y da su recorrido.

Para terminar me gusta la comparación que hace Perera: "La matemática, como un sistema puramente formal, se puede comparar con el ajedrez, los elementos primitivos en ajedrez son las 32 piezas y el tablero; los axiomas son las descripciones de los movimientos de las piezas, no son evidentes, no son ni verdaderos ni falsos, son así y se aceptan sin discutir, las reglas del juego constituyen la lógica del sistema. Nadie se pregunta si el ajedrez es verdadero o falso, lo único importante es saber si se siguen las reglas".

Referencias

(1) Bonsdorff, E.; Fabel, K. & Riihimaa, O. *Ajedrez y Matemáticas*, Ediciones Martínez Roca, Barcelona, 1974.

(2) Gardner, Martin. *Circo Matemático*, Alianza Editorial, Madrid, 1985.

(3) Karpov, A. & Guik, E. *Mosaico Ajedrecístico*, Editorial Raduga, New York, 1984.

(4) Kürschák, József. *Hungarian Problem Book II*, Random House, New York, 1963.

(5) Perero, M. *Historia e Historias de Matemáticas*, Grupo Editorial, Iberoamérica, 1994.

(6) Saidy, Anthony. *La Batalla de las Ideas en Ajedrez*, Editorial Raduga, New York, 1984.