APLICACIÓN DE GAUSS Y FRACCIONES CONTINUAS

Sergio Plaza
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile

Fracciones continuas

Las fracciones continuas permiten aproximar un número real por números racionales. Consideremos primero el siguiente ejemplo:

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{\frac{11}{4}} = \frac{1}{2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+1}}} .$$

Este desarrollo termina en un número finito de pasos. Una expresión como la anterior se llama *fracción continua.*

Definición 1: *Una fracción continua finita es una expresión de la forma*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} , \tag{1}$$

donde a_0 es un número entero cualquiera y para $i = 1, 2, \ldots, n$, los a_i son números enteros positivos. Denotaremos la expresión (1) *mediante el símbolo*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad o \quad a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_n] .$$

Por ejemplo,

$$[1;2,3,1] = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} .$$

Es claro que toda fracción continua finita $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ representa un número racional. Recíprocamente, se tiene:

Teorema 1: *Todo número racional puede ser escrito como una fracción continua finita.*

Demostración: Sea a/b un número racional positivo (el caso en que sea negativo se trata de modo análogo). Por algoritmo de división de Euclides (ver [1]), existen números enteros positivos $a_1, \ldots, a_n$, tales que

$$\begin{array}{rcll} a & = & ba_0 + r_1 \ , & 0 < r_1 < b \ , \\ b & = & r_1 a_1 + r_2 \ , & 0 < r_2 < r_1 \ , \\ r_1 & = & r_2 a_2 + r_3 \ , & 0 < r_3 < r_2 \ , \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{n-2} & = & r_{n-1} a_{n-1} + r_n \ , & 0 < r_n < r_{n-1} \ , \\ r_{n-1} & = & r_n a_n \ . & \end{array}$$

Esta cadena finita de igualdades se puede reescribir de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{b} & = & a_0 + \dfrac{r_1}{b} = a_0 + \dfrac{1}{\dfrac{b}{r_1}} \\ \dfrac{b}{r_1} & = & a_1 + \dfrac{r_2}{r_1} = a_1 + \dfrac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}} \\ \dfrac{r_1}{r_2} & = & a_2 + \dfrac{r_3}{r_2} = a_2 + \dfrac{1}{\dfrac{r_2}{r_3}} \\ & \vdots & \\ \dfrac{r_{n-1}}{r_n} & = & a_n \end{array}$$

Reemplazando cada una de estas expresiones en la inmediatamente anterior, obtenemos

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Es decir, hemos probado que

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_n] \, .$$

Por ejemplo, el número racional 943/414 se descompone según el algoritmo de la división como

$$\begin{aligned} 943 &= 2 \cdot 414 + 115 \\ 414 &= 3 \cdot 115 + 69 \\ 115 &= 1 \cdot 69 + 46 \\ 69 &= 1 \cdot 46 + 23 \\ 46 &= 2 \cdot 23 \, , \end{aligned}$$

luego su fracción continua es

$$\begin{aligned} \frac{943}{414} &= 2 + \frac{115}{414} = 2 + \frac{1}{\frac{414}{115}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{69}{115}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{115}{69}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{46}{69}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{69}{46}}}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{23}{46}}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [3; 3, 1, 1, 2] \, . \end{aligned}$$

También es inmediato el cálculo de 414/943, puesto que

$$\frac{414}{943} = \frac{1}{\frac{943}{414}} = \frac{1}{[2; 3, 1, 1, 2]} = [0; 2, 3, 1, 1, 2] \, .$$

Esta representación de un número racional como fracción continua no es única. Por ejemplo, si $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ es una representación, con $a_n \geq 2$, entonces la cola de la fracción continua es

$$a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}} \, ,$$

en la cual podemos reescribir:

$$a_{n-1} + \frac{1}{(a_n - 1) + 1} = a_{n-1} + \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}} \; ,$$

y por lo tanto tenemos, para la fracción continua completa, la igualdad:

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1] \; .$$

Por su parte, si $a_n = 1$, tenemos

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1 \; ,$$

y entonces $[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$.

Ahora sea x un número real, no racional. El Teorema 1 nos dice que x no es representable por una fracción continua finita. Sin embargo, podemos tratar de aplicar el mismo algoritmo anterior de una manera especial. Para ello, introduciremos los conceptos *parte entera* y *parte fraccional* de un número real.

Definición 2: *La parte entera, $[x]$, de un número real x es el mayor número entero menor o igual que x. La parte fraccionaria, $((x))$, de x es $((x)) = x - [x]$.*

Observemos que $0 \leq ((x)) < x - [x] \leq 1$ y que $x - [x] = 0$, si y sólo si x es entero.

Ejemplo:

$$\left[\frac{943}{414}\right] = 2 \, , \quad \text{y} \quad \left(\left(\frac{943}{414}\right)\right) = \frac{115}{414} \; .$$

Ahora sea x un número real no entero. Entonces podemos escribir $x = [x] + (x - [x]) = [x] + ((x))$. Definamos $r_0 = [x]$ y $r_1 = ((x))$. Como $0 < r_1 < 1$, se tiene:

$$x = x + r_1 = [x] + \frac{1}{\frac{1}{r_1}} \, , \quad \frac{1}{r_1} > 1 \; .$$

Apliquemos nuevamente el proceso anterior, ahora a $1/r_1$, con lo cual

$$\frac{1}{r_1} = \left[\frac{1}{r_1}\right] + r_2 \; , \quad 0 < r_2 < 1 \; ,$$

donde $r_2 = [1/r_1] - 1/r_1$ es la parte fraccionaria de $1/r_1$. Continuando de este modo sucesivamente podemos escribir

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \cfrac{1}{\left[\frac{1}{r_1}\right] + \cfrac{1}{\left[\frac{1}{r_2}\right] + r_3}} \\ &= a_0 + \cfrac{1}{\left[\frac{1}{r_1}\right] + \cfrac{1}{\left[\frac{1}{r_2}\right] + \cfrac{1}{\left[\frac{1}{r_3}\right] + r_4}}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Este proceso termina cuando tenemos algún $r_\ell = 0$, en cuyo caso el número es racional, como vimos arriba. Si el proceso no acaba en un número finito de pasos, x es irracional.

Advertimos, pues, que el algoritmo anterior permite asociar a cada número real x una fracción continua finita $c_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$, donde $a_\ell = [1/r_\ell]$, con $r_\ell = [1/r_{\ell-1}] - 1/r_{\ell-1}$.

A continuación damos algunas proposiciones básicas sobre fracciones continuas. Su demostración se puede encontrar en [3], [4] o [5].

Dados un número real x y un número natural k, consideremos la fracción continua finita $c_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ asociada, es decir,

$$c_k = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{k-2} + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}\,, \tag{2}$$

donde

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{k-2} + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + r_k}}}}}\,. \tag{3}$$

Definamos ahora los siguientes números, asociados con c_k:

$$p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}, \quad i \geq 2 \ , \tag{4}$$
$$q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \quad i \geq 2 \ . \tag{5}$$

Se tiene así que: $q_0 = 1$, $q_1 = a_1 q_0 \geq q_0, \ldots, q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \geq q_{i-1}$, es decir, $1 = q_0 \leq q_1 \leq \cdots \leq q_n \leq \cdots$.

Proposición 1: *Con las notaciones anteriores:*

1. *Dados un número real r y un número entero $n \geq 0$, entonces*

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, r_n] = \frac{r_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} \ .$$

2. *Para cada número entero $n \geq 0$, $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.*

3.

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (-1)^{n-1} \ , \quad n \geq 1 \ , \\ r_n - r_{n-1} &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_n \cdot q_{n-1}} \ , \quad n \geq 1 \ , \\ p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (-1)^n a_n \ , \quad n \geq 2 \ , \\ r_n - r_{n-2} &= \frac{(-1)^n a_n}{q_n \cdot q_{n-2}} \ , \quad n \geq 2 \ , \end{aligned}$$

y $(p_n; q_n) = 1$.

Ahora mostraremos que un número real, no racional, x puede ser aproximado tanto cuanto se desee por números racionales.

Teorema 2: *Sea x un número real arbitrario. Dado un número real $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe un número racional q tal que*

$$|x - q| < \varepsilon \ .$$

Demostración: Sabemos que

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, r_n] = \frac{r_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}}$$

y

$$c_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n] \ .$$

Luego

$$\begin{aligned} x - c_{n-1} &= \frac{r_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \\ &= -\frac{p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}}{q_{n-1}(r_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2})} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}(r_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2})} \end{aligned}$$

Como la sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crece indefinidamente y $r_n > 0$, se tiene que $x - c_{n-1}$ es cada vez más próximo a cero cuando n crece. Por otra parte, es fácil ver que dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tomando n_0 suficientemente grande, de modo que $|x - c_{n-1}| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, y eligiendo $q = c_{n-1}$, se tiene lo pedido.

Las fracciones continuas finitas c_n son llamadas las *convergentes* de x.

Ejemplos:

1. Busquemos el desarrollo en fracción continua de $\sqrt{2}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) \\ &= 1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Luego $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$. Esta fracción continua es periódica infinita. Como ejercicio el lector puede desarrollar las aproximaciones c_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ para $\sqrt{2}$.

2. Consideremos la ecuación cuadrática $x^2 = ax + 1$, donde a es un número entero positivo. Tenemos

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{1}{x} \\ &= a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{x}} \\ &= a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{x}}}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Luego $x = [a; a, a, a, \ldots]$. Para $a = 1$ se tiene $x = (1 + \sqrt{5})/2$, y por lo tanto $(1 + \sqrt{5})/2 = [1; 1, 1, 1, 1, \ldots]$. Ahora, si escribimos las convergentes de la fracción continua de $(1 + \sqrt{5})/2$, tenemos

$$1 \;;\; 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \;;\; 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2} \;;\; 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3} \,.$$

Los siguientes términos de esta sucesión son 8/5, 13/8, 21/13, etc. Observemos que los denominadores de la sucesión anterior vienen dados por la sucesión

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots,$$

es decir, vienen dados por la sucesión

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ \text{ y }\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1}\,,\ \ n \geq 2\,,$$

la cual es conocida con el nombre de *sucesión de Fibonacci.*

Aplicación de Gauss

Al parecer Gauss fue el primero en preocuparse del estudio de la parte fraccional en el desarrollo de un número en fracción continua.

Para ello consideró la aplicación $G : [0,1[\to [0,1[$ dada por

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \ \mathrm{mod}(1) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

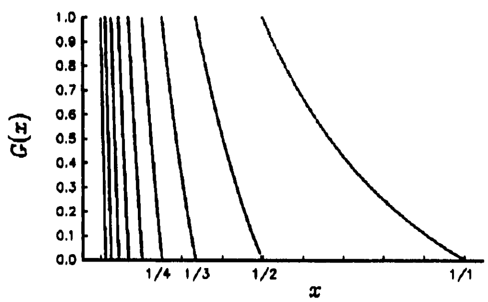

Figura 1. Gráfico de G.

Valiéndonos de esta aplicación, el algoritmo para encontrar la fracción continua de un número real x se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \left(\left(\frac{1}{r_k}\right)\right) = G(r_k) \\ a_{k+1} &= \left[\frac{1}{r_k}\right], \quad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Ahora sea $x_0 = [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots] \in [0,1[$. Entonces $G(x_0) = x_1 = [a_2, a_3, a_4, \ldots]$, $G(x_1) = x_2 = [a_3, a_4, \ldots]$, etc. Denotemos por $G^{\circ k}$ la composición de G consigo misma k veces, es decir, $G^{\circ k} = G \circ G \circ \cdots \circ G$, k veces. Decimos que un punto x_0 es *periódico* de período $k \geq 1$ para G, si $G^{\circ k}(x_0) = x_0$. Cuando $k = 1$, decimos que x_0 es un *punto fijo* de G. Por ejemplo, $x_0 = [1,2,1,2,\ldots]$ es periódico de período 2, pues $x_1 = G(x_0) = [2,1,2,1,\ldots]$ y $x_2 = G(x_1) = [1,2,1,2,\ldots]$, esto es, $G \circ G(x_0) = x_0$.

Es fácil ver que existen infinitos puntos periódicos para G. Para ello basta tomar un bloque de longitud m de enteros positivos k_1, k_2, $\ldots$, k_m y formar el número $x_0 = [k_1, k_2, \ldots, k_m, k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots]$.

Un cálculo sencillo muestra que si x_0 es un punto periódico de G, entonces es solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros. En general, se tiene:

Teorema 3 (Galois): *Un número real x tiene una fracción continua periódica, incluyendo el primer entero n_0, si y sólo si x es solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros y, además, la otra raíz pertenece al intervalo* $]-1,0[$.

Por ejemplo, la razón áurea, $\tau = (1+\sqrt{5})/2$, es solución de la ecuación $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, y como vimos arriba su fracción continua es $\tau = 1 + [1,1,1,1,\ldots]$ y la de $1/\tau$ es $1/\tau = [1,1,1,1,1\ldots]$.

Decimos que x_0 es *finalmente periódico* si para algún entero positivo $k \geq 2$, $x_k = G^{\circ k}(x_0)$ es periódico para G. Por lo visto arriba su fracción continua tiene la forma

$$x_0 = [a_1, a_2, \ldots, a_k, n_1, \ldots, n_\ell, n_1, \ldots, n_\ell, \ldots].$$

Estos puntos tienen una caracterización sencilla dada por el siguiente teorema:

Teorema 4 (Lagrange): *x_0 es finalmente periódico para G si y sólo si es solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.*

Cuando x no es solución de ninguna ecuación cuadrática con coeficientes enteros, su fracción continua puede ser muy irregular. (Ver, por ejemplo, 6.)

Referencias:

1. *Matemáticas y Olimpíadas*, O. Barriga, V. Cortés, S. Plaza, G. Riera, Soc. de Matemática de Chile, 1994.

2. *Chaos and Continued Fractions*, R. M. Corless, G. W. Frank, J. G. Monroe, Physica D **46**, 1990, 241–253.

3. *Continued Fractions*, A. Y. Khintchin, Noordhoff, Groningen, 1963.

4. *An Introduction to the Theory of Numbers*, G. H. Hardy, E. M. Wright, Oxford Univ. Press, 1971.

5. *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications*, W. B. Jones, W. J. Thron, Addison-Wesley, Reading, 1980.

6. *Números de Fibonacci y fracciones continuas*, C. Tamm, J. Rivera, Revista del Profesor de Matemáticas, Vol. 2, 1994, págs. 35-40.

N.R.: El Profesor Sergio Plaza obtuvo su Doctorado en el IMPA (Brasil) en el año 1988. En la actualidad es Profesor Asociado de la Universidad de Santiago de Chile e investigador en Sistemas Dinámicos.