SÓLIDOS PLATÓNICOS

Oscar Barriga
Facultad de Ciencias, Universidad de Chile

Figura 1

"En cuanto a los principios superiores, que son los de los triángulos, Dios los conoce, y un pequeño número de hombres amados por los dioses."

Platón: *Timeo* o *De la Naturaleza*.

Un polígono regular se ha entendido, desde la época de los griegos, como un polígono inscrito en una circunferencia, cuyos lados poseen todos igual longitud. El más simple que podemos concebir es, naturalmente, un triángulo equilátero; el segundo, un cuadrado; el tercero, un pentágono y así sucesivamente. En general, siempre existe un polígono regular de n lados, para cualquier valor natural de n no inferior a tres.

Nada nos impide ahora preguntarnos si existe, en el espacio tridimensional, algo equivalente, que deberíamos llamar *poliedro* regular. ¿Qué requisitos ha de cumplir? Observemos, en primer lugar, que los polígonos regulares pueden ser caracterizados por dos propiedades esenciales: sus lados son todos congruentes entre sí, y a cada vértice concurre siempre el mismo número de lados (dicho número es, por cierto, igual a 2). Pues bien, si extendemos las nociones anteriores al espacio tridimensional, hallamos que en un poliedro regular, además de estar inscrito en una esfera, sus *caras* deberán ser polígonos regulares congruentes entre sí, y a cada vértice debe concurrir el mismo número de caras (o, equivalentemente, el mismo número de aristas).

Sin embargo, no existen, como en el caso de los polígonos, infinitos poliedros regulares. Los mismos griegos ya conocían el hecho de que sólo hay *cinco* de ellos, lo cual interpretaron desde una perspectiva fuertemente mística, convirtiéndose, eventualmente, en elemento importante de su sistema filosófico. Ello ha quedado perpetuado en su denominación alternativa de *Sólidos Platónicos*, por haberlos descrito Platón en uno de sus *Diálogos*, el *Timeo.*

De su lectura, la cual, así como la del resto de los *Diálogos*, recomendamos, especialmente a los estudiantes, se desprende que, para la construcción de estos cuerpos regulares, la piedra angular es el triángulo, el más simple de los polígonos. Dice Platón en el *Timeo*:

> *"Todos los triángulos proceden de dos triángulos solamente, cada uno de los cuales tiene un ángulo recto y los otros dos agudos. Uno de estos triángulos tiene de cada lado una parte igual de un ángulo recto, dividido por lados iguales; el otro, dos partes desiguales... "* (Figura 2.)

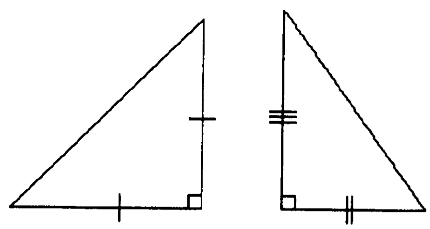


Figura 2

En el párrafo siguiente se elige el triángulo escaleno más bello (figura 3):

> *"De los dos triángulos de que os he hablado, el isósceles no puede tener más que una sola forma; el triángulo prolongado puede admitir un número infinito. Ésta es la razón por la cual, entre esta multitud de triángulos, debemos escoger el más bello...*
>
> *Si alguno nos puede mostrar uno más bello que el que hemos preferido, nos someteremos a su opinión y lo miraremos como un amigo y no como un enemigo. Declaramos, pues, que entre todos estos triángulos hay uno más bello, que los supera a todos, y es aquél del cual se compone el triángulo equilátero, el tercero... (Es) aquél en el que el cuadrado del lado mayor es triple del cuadrado del pequeño... "*

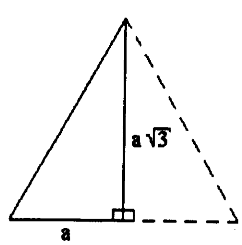


Figura 3

Las medidas de los lados del triángulo escaleno más bello a los ojos de Platón son proporcionales a los números 1, $\sqrt{3}$, 2. Más adelante en el texto platónico estos triángulos serán unidos por la hipotenusa, sin formar un rectángulo. Si se les une por la hipotenusa formando un rectángulo, el resultado no es aquél que Leonardo, siglos más tarde, consideraría como el más bello. En efecto, exceptuando al cuadrado, para Leonardo el rectángulo más bello es aquél cuyos lados se hallan en la razón $1 : \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, llamada *sección áurea* o *sección divina*.

En los párrafos siguientes del *Timeo* se describe la construcción de los sólidos regulares. Por razones de contexto, sólo se tratan cuatro de ellos. Su orden de aparición en el texto original es: tetraedro, octaedro, icosaedro y cubo. El quinto, el dodecaedro, es relegado a una simple referencia, aunque su papel es más importante en lo postulado por el *Diálogo.*

> *"Nos había parecido que las cuatro especies de cuerpos (elementales) nacían los unos de los otros, pero ésta es una ilusión. En efecto, estas cuatro especies nacen justamente de los triángulos que hemos mencionado, pero tres son formadas de uno mismo, a saber, del que tiene los lados desiguales; y sólo la cuarta procede del isósceles...*
>
> *Comencemos por el primero, cuya composición es la más simple. Tiene por elemento el triángulo, cuya hipotenusa es doble del lado menor. Unid dos de estos triángulos, siguiendo la diagonal; haced tres veces esta operación, de manera que todas las diagonales y todos los lados menores concurran en un mismo punto que les sirva de centro común, y tendréis un triángulo equilátero, compuesto de seis triángulos particulares."*(Figura 4.)

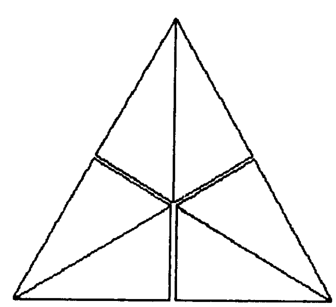
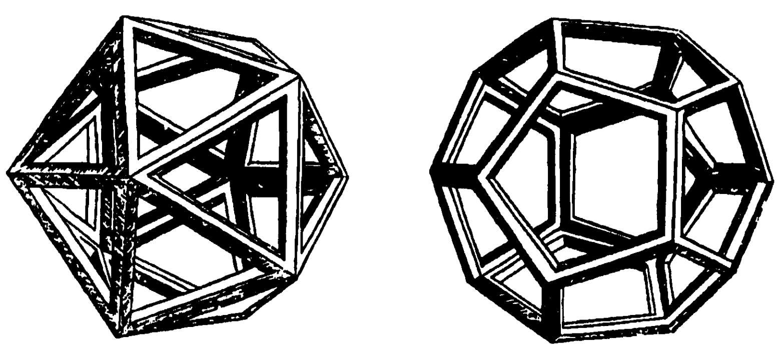


Figura 4

> *"Cuatro de estos triángulos equiláteros, mediante la reunión de tres ángulos planos, forman un ángulo sólido, cuya magnitud supera a la del ángulo plano más obtuso; y cuatro de estos nuevos ángulos componen juntos la primera especie de sólido, que divide en partes iguales y semejantes la esfera*

en que está inscrito. El segundo sólido se compone de los mismos triángulos, reunidos en ocho triángulos equiláteros y formando un ángulo sólido de cuatro ángulos planos; y seis de estos ángulos constituyen este segundo cuerpo. El tercer sólido se forma de ciento veinte triángulos elementales de doce ángulos sólidos, rodeados cada uno de cinco triángulos equiláteros, con veinte triángulos equiláteros por bases. Este elemento no debe producir otros sólidos. En cuanto al triángulo isósceles, a él corresponde engendrar la cuarta especie de cuerpos. Reunidos cuatro triángulos isósceles, poniendo en el centro los cuatro ángulos rectos, de manera que compusieran un tetrágono equilátero, seis tetrágonos dieron ocho ángulos sólidos, estando formado cada ángulo sólido de tres ángulos planos, y de esta amalgama resultó el cubo, que tiene por base seis tetrágonos regulares. Restaba una quinta combinación, y Dios se sirvió de ella para trazar el plan del Universo."



(a) (b)

Figura 5. (a) Icosaedro; (b) Dodecaedro. Ilustraciones de Leonardo da Vinci para el libro *De Divina Proportione*, de Luca Pacioli. Cada cara del icosaedro corresponde a uno de los triángulos construidos en la figura 4.

Es interesante revisar con cuidado el argumento probablemente más usado en la época platónica para demostrar que no son sino 5 los sólidos regulares. Es lo que nos proponemos exponer a continuación, valiéndonos, sí, de las ventajas del álgebra, que los griegos desconocían. Sin embargo, hacemos notar que cada uno de los pasos algebraicos necesarios puede ser reemplazado por razonamientos de índole puramente geométrica, del todo accesibles a los griegos. Hecha la observación, procedamos.

Recordemos que, en un sólido regular, cada cara debe ser un polígono regular de, digamos, p lados. Cada uno corresponde, naturalmente, a una *arista* del sólido. Denotemos por q el número de caras que concurren a un vértice del sólido. Cada sólido regular tiene, de esta manera, asociado un par de números (p,q), siendo inmediato, de su definición misma, que cada uno de ellos es no inferior a tres. El cubo, por ejemplo, tiene asociada la pareja $(4,3)$: el número 4 porque las caras son cuadrados; el número 3 porque en cada vértice del cubo concurren 3 caras (ó 3 aristas).

Usemos ahora el simple hecho, bien conocido de los griegos, que los ángulos interiores de un triángulo suman $180°$. Uniendo los p vértices de un polígono regular con el centro de la circunferencia circunscrita en él, sumando $180°$ por cada uno de los p triángulos que se forman, restando dos veces $180°$ por el ángulo completo que se forma en el centro, y dividiendo finalmente por el número de vértices, se obtiene que el ángulo en un vértice cualquiera del polígono regular es:

$$\frac{(p-2)\cdot 180}{p} .$$

Si el número anterior se multiplica por q, es decir, por el número de caras que concurren a un vértice, se obtiene el *ángulo sólido* que se forma en un vértice cualquiera. Estando nuestro sólido inscrito en una esfera, el ángulo sólido debe ser inferior a un "ángulo plano", es decir inferior a $2 \cdot 180$. Esta simple condición debe haber sido pensada ya en ese tiempo. Hoy podemos escribirla en símbolos así:

$$\frac{(p-2)\cdot 180}{p} \cdot q < 2 \cdot 180 .$$

De esta desigualdad se sigue:

$$\frac{(p-2)q}{p} < 2$$

$$pq - 2q - 2p < 0$$

$$pq - 2p - 2q + 4 < 4$$

$$(p-2)(q-2) < 4 \qquad (1)$$

En consecuencia, el número—entero— $(p-2)(q-2)$ sólo puede ser 1, 2 ó 3. Para el valor 1 la única solución entera posible es $(p,q) = (3,3)$. Para el valor 2, cuyas únicas factorizaciones son $1 \cdot 2$ y $2 \cdot 1$, se obtienen soluciones $(3,4)$ y $(4,3)$. Para el valor 3, sólo factorizable como $1 \cdot 3$ y $3 \cdot 1$, las únicas soluciones enteras son $(3,5)$ y $(5,3)$.

Con esto ya sabemos que no puede haber sino 5 sólidos regulares:

(p,q)	Formado por	Nombre
$(3,3)$	triángulos, tres en cada vértice	Tetraedro
$(3,4)$	triángulos, cuatro en cada vértice	Octaedro
$(4,3)$	cuadrados, tres en cada vértice	Cubo
$(3,5)$	triángulos, cinco en cada vértice	Icosaedro
$(5,3)$	pentágonos, tres en cada vértice	Dodecaedro

Solamente si se internaliza y comprende profundamente la demostración anterior, o cualquiera otra, desaparecerá, aunque no del todo, el misterio: ¿Por qué no hay más? y ¿no es fascinante que sólo estén involucradas tan poquita geometría y tan poquita aritmética? ¡O tal vez no sean tan pocas después de todo!

(c)

Figura 6. Icosaedro truncado. Ilustración de Leonardo da Vinci para el libro *De Divina Proportione*, de Luca Pacioli. Si coloreamos de blanco los hexágonos y de negro los pentágonos, obtenemos nada menos que el sólido más popular de hoy día.

Para contar los elementos de un sólido (sus caras, aristas y vértices) se puede utilizar un concepto fundamental, la *característica de Euler-Poincaré*, de gran importancia en sí misma, pero que introducimos aquí de manera intuitiva y experimental como sigue. Dibuje una cantidad de polígonos cualesquiera, unidos por sus aristas, por sus vértices, o a través de aristas adicionales, como en el ejemplo de la figura en la página siguiente.

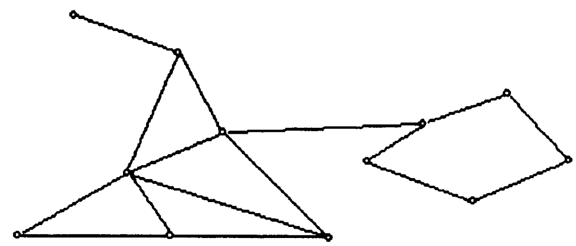


Figura 7

Cuente el número v de vértices, a de aristas y c de *regiones* del plano formadas por su dibujo. (En el plano, las regiones corresponderán a las *caras* y una región exterior a su dibujo. En el ejemplo de la figura, las regiones son 6. Si el mismo dibujo hubiese sido hecho en una esfera, no habría una región que pueda ser llamada exterior, pero es intuitivamente claro que la superficie de la esfera sería dividida en 6 regiones también.) Descubra ahora la relación $v - a + c = 2$. Se dice que la característica de Euler-Poincaré del plano (y de la esfera) es 2.

Considere ahora un sólido regular cuyo par de números asociado es (p, q). Sea v el número de vértices, a el número de aristas y c el número de caras.

Como cada cara tiene p aristas, el número total de aristas es pc. Claro que cada arista es compartida por dos caras, de manera que pc es realmente el doble del número de aristas:

$$pc = 2a \ .$$

Por su parte, a cada vértice concurren q aristas, luego el número total de aristas es qv. Pero, puesto que cada arista concurre a dos vértices, qv corresponde al doble del número de aristas:

$$qv = 2a \ .$$

Las relaciones $pc = 2a = qv$ y $v - a + c = 2$ permiten calcular v, a y c para cada sólido. Por ejemplo, para el dodecaedro $p = 5$, $q = 3$. En consecuencia, $5c = 2a = 3v$ y $v - a + c = 2$, de donde se obtienen los valores

$$c = 12 \ , \qquad a = 30 \ , \qquad v = 20 \ .$$

En la siguiente tabla se expone el resultado del cálculo anterior para los 5 sólidos regulares.

	p	q	v	a	c
Tetraedro	3	3	4	6	4
Octaedro	3	4	6	12	8
Cubo	4	3	8	12	6
Icosaedro	3	5	12	30	20
Dodecaedro	5	3	20	30	12

Note la dualidad Octaedro–Cubo e Icosaedro–Dodecaedro. No es un hecho casual, así como tampoco accidental la palabra empleada. En general, si se unen los centros de gravedad de las caras de un sólido se obtiene el llamado *sólido dual.* En particular, a partir del octaedro regular obtenemos el cubo, y viceversa. Análogo vínculo existe entre el icosaedro y el dodecaedro. ¿Y qué ocurre con el tetraedro? Bueno, el sólido dual obtenido resulta ser otro tetraedro. Y recordemos el comentario al pie de la ecuación (1): ¡Todo viene del hecho que $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$, $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$ y $1 \cdot 3 = 3 \cdot 1$!

De aquí en adelante comienza el juego y la entretención personal. Los estudiantes disfrutarán construyendo modelos, encontrando simetrías, truncamientos, relaciones y todo aquello que provenga de su imaginación. La lectura de las citas también deja mucho que pensar y discutir. Por ejemplo: ¿Por qué el triángulo equilátero con el cual se forma un tetraedro es construido de seis y no de dos triángulos equiláteros? La elección no le parece casual a este autor: El número 24 asociado así al tetraedro, o el número 120 al icosaedro, tienen una relevancia que el lector conoce o, si la ha olvidado, recordará ahora desde otra perspectiva. ¿Cuánto sabían realmente los griegos?

Referencias:

1. *Timeo* o *De la Naturaleza*, Platón.
2. *Geometry I and II*, M. Berger, Springer-Verlag, 1987.

N.R.: El Profesor Oscar Barriga obtuvo su PhD en la Universidad de Illinois (Chicago) en el año 1975. En la actualidad es Profesor Titular de la Universidad de Chile e investigador en Grupos y Geometrías Finitas.