SOBRE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Rafael Benguria
Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile

Mi primera experiencia con ecuaciones algebraicas provino de un problema que me contó mi abuelo materno. Él probablemente lo recordaba de su época de estudiante, hacia fines del siglo pasado. El problema en cuestión era el siguiente: "Un halcón posado en la rama de un árbol observa el paso de una bandada de palomas y les dice: ¡Adiós, cien palomas!, saludo al que una de las palomas responde: Se equivoca, señor halcón, no somos cien. Nosotras, más otras tantas como nosotras, más la mitad, más la cuarta parte, más Ud., señor halcón, somos cien. ¿Cuántas palomas había en la bandada?" Cuando supe por primera vez de este problema no sabía nada de álgebra, así que lo resolví probando varios números, y luego de muchos intentos obtuve la respuesta correcta: 36 palomas. En los primeros cursos de álgebra uno se encuentra con numerosos problemas como éste, y entonces aprecia lo simple que es resolverlos reduciéndolos a ecuaciones algebraicas. En el caso del problema de las palomas, si uno llama x al número de palomas, se puede escribir la respuesta de la paloma al saludo del halcón como

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100 , \tag{1}$$

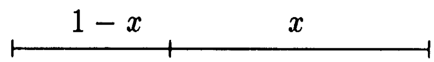
de donde se obtiene $11x/4 = 99$ y, finalmente, $x = 36$.

La ecuación (1) es una ecuación algebraica de primer grado. Ecuaciones como ésta y sus soluciones han sido conocidas desde la antigüedad.

El tipo de ecuación que sigue en dificultad es la ecuación de segundo grado

$$x^2 + bx + c = 0 . \tag{2}$$

Las ecuaciones de segundo grado eran conocidas por los babilonios, aunque la solución algebraica tal como la conocemos hoy aparece, probablemente, por primera vez en los libros de matemáticos árabes del siglo IX D.C. Una de las ecuaciones de segundo grado más conocidas es la que sirve para determinar la llamada *sección áurea*. Se dice que un segmento está dividido en proporción áurea si el cuociente entre el trazo menor y el mayor es el mismo que el cuociente entre el trozo mayor y el segmento total (ver figura en la página siguiente).



Si el segmento total tiene una unidad de largo (metros, centímetros o lo que sea) y llamamos x al largo del trozo mayor, el segmento estará dividido en proporción áurea siempre que

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} ,$$

es decir, siempre que x sea la solución de la ecuación cuadrática

$$x^2 + x - 1 = 0 ,$$

cuya única solución positiva es $x = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,61803$. La *sección áurea* fue adoptada como una de las normas de estética en arquitectura y escultura por los griegos en el siglo V antes de Cristo.

Existen dos formas, equivalentes, de encontrar la solución algebraica de la ecuación de segundo grado. Una consiste en sumar a ambos lados de la ecuación (2) la cantidad $b^2/4 - c$, para obtener un cuadrado en el lado izquierdo, es decir

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c .$$

Finalmente, extrayendo raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación obtenemos las soluciones conocidas:

$$x = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}) . \tag{3}$$

En el segundo método hacemos un cambio de variable, con el objeto de reducir la ecuación (2) a una ecuación de la forma $x^2 = \tilde{c}$, que es simple de resolver. Hacemos, entonces, $x = y + \alpha$. La idea es escoger α de modo que podamos eliminar el término lineal en x. Obtenemos

$$y^2 + (2\alpha + b)y + (\alpha^2 + b\alpha + c) = 0 .$$

Escogemos α de modo que el coeficiente en y se anule, es decir $2\alpha + b = 0$, $\alpha = -b/2$, y finalmente la ecuación queda:

$$y^2 = \frac{b^2}{4} - c ,$$

de donde $y = \pm\sqrt{b^2 - 4c}/2$. Como $x = y + \alpha = y - (b/2)$, x queda dado por (3). Para las ecuaciones de segundo grado ambos métodos son prácticamente idénticos, pero el segundo se puede generalizar a ecuaciones de mayor grado.

La ecuación general de tercer grado es de la forma

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 . \tag{4}$$

La solución de la ecuación de tercer grado fue publicada por primera vez en el *Ars Magna* de Girolamo Cardano en 1545 [3]. Girolamo Cardano tomó su solución de los trabajos de Nicolo Tartaglia, aunque probablemente el primero en resolverla fue Scipione del Ferro (1465–1526) (ver recuadros).

Girolamo Cardano: matemático y físico italiano. Nació en Pavia en 1501 y murió en Roma en 1576 [11, págs. 295–297]. Escribió libros sobre aritmética, astronomía y física. Su obra más conocida es un tratado de álgebra, el *Ars Magna* [3]. Fue profesor de la Universidad de Bolonia. Es el inventor del sistema de suspensión que lleva su nombre.

Nicolo Fontana, llamado "Tartaglia": matemático italiano. Nació en Brescia alrededor de 1499 y murió en Venecia en 1557. Debido a un defecto en su manera de hablar se le apodó "Tartaglia" (i.e. "tartamudo"), pseudónimo que usó al publicar sus trabajos. Fue probablemente el primero en aplicar matemáticas a la artillería. Publicó un tratado de aritmética y editó una versión de los trabajos de Euclides y Arquímedes (1543).

El método para resolver la cúbica, tal como fue publicado en el *Ars Magna* es el siguiente (ver e.g. [7, pág. 480]): primero se reduce la ecuación de modo que no aparezca el término cuadrático. Esto se logra haciendo el cambio de variables

$$x = z - \frac{b}{3} ,$$

de modo que la ecuación en z es de la forma

$$z^3 + \tilde{c}z + \tilde{d} = 0 , \tag{5}$$

donde los coeficientes $\tilde{c}$ y $\tilde{d}$ están dados, en términos de los coeficientes originales por

$$\tilde{c} = c - \frac{b^2}{3} \qquad \text{y} \qquad \tilde{d} = d + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} .$$

Ahora, con el objeto de resolver la ecuación (5) para z, escribamos $z = u+v$, en que u y v serán determinadas luego. Entonces, la ecuación

(5) se escribe como

$$u^3 + v^3 + (3uv + \tilde{c})(u + v) + \tilde{d} = 0 \ . \tag{6}$$

Ahora elegimos u y v de modo que el coeficiente $3uv + \tilde{c}$ se anule, es decir $v = -\tilde{c}/(3u)$. De este modo, la ecuación (6) se escribe en términos de u y v del modo siguiente:

$$u^3 + v^3 + \tilde{d} = 0 \ ,$$

o, en términos sólo de u,

$$u^6 + \tilde{d}u^3 - \frac{\tilde{c}^3}{27} = 0 \ , \tag{7}$$

la cual es una ecuación cuadrática para u^3. Al resolverla (observando aquí que podemos elegir cualquiera de las dos soluciones; de cualquier modo, v^3 será la otra solución) obtenemos:

$$u = \left(-\frac{\tilde{d}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{d}^2}{4} + \frac{\tilde{c}^3}{27}} \right)^{1/3}$$

y, dado que $u^3 + v^3 + \tilde{d} = 0$,

$$v = \left(-\frac{\tilde{d}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{d}^2}{4} + \frac{\tilde{c}^3}{27}} \right)^{1/3} \ .$$

Finalmente, $x = u + v - (b/3)$.

Scipione Del Ferro: matemático italiano (1465–1526). Alrededor de 1515, siendo profesor de la Universidad de Bolonia, logró resolver la ecuación cúbica del tipo $x^3 + mx = n$, de la cual ciertamente se puede derivar la solución de la cúbica general. La solución de Del Ferro fue conocida por Tartaglia a través de un alumno de Del Ferro, Antonio Maria Fior. Finalmente la solución fue conocida por Cardano, quien la publicó en el *Ars Magna* en 1545. En torno a estos hechos se han tejido varias leyendas (para mayores detalles ver [4, Lecture 16, págs. 172–181]).

La solución del *Ars Magna* es relativamente simple, pero tiene un problema: aunque su deducción es fácil de seguir, es difícil recordar el método de solución. Además, no permite generalizar el método para resolver la cuártica. Es por eso que numerosos autores, después de la publicación de la solución en el *Ars Magna*, han encontrado sus propios métodos de solución. Éstos dieron origen, a principios del siglo XIX, a conexiones muy interesantes con Teoría de Grupos, conexiones que permitieron finalmente al matemático noruego Niels Abel, en 1828, demostrar que no hay solución de la ecuación general de quinto grado [1] (y por tanto de cualquier grado mayor o igual a 5) en términos de operaciones simples (i.e. sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces). Los métodos fueron luego perfeccionados por Galois [5]. La teoría de Galois está lejos del alcance de este artículo, pero existe una muy buena exposición de ella en la Colección "The Carus Mathematical Monographs" [6]. En lo que resta de este artículo voy a presentar una solución no muy difundida en los libros de texto y que permite al menos tener una idea de por qué es posible resolver la cúbica y la cuártica, pero no las ecuaciones de mayor grado.

Volvamos a la ecuación cúbica general (4). No es difícil advertir que si uno hace el cambio de variables

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \tag{8}$$

en la ecuación cúbica, con α, β, γ y δ parámetros cualesquiera, la ecuación para y también será una cúbica, de la forma

$$y^3 + \tilde{b}y^2 + \tilde{c}y + \tilde{d} = 0 \ . \tag{9}$$

Los nuevos coeficientes $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ y $\tilde{d}$ dependen de los antiguos, así como de los parámetros de la transformación α, β, γ y δ. Recordemos que al resolver la ecuación de segundo grado, por el segundo método expuesto, hicimos una transformación de la forma $x = y + \alpha$ y usamos el parámetro α para deshacernos del término lineal en y. Ahora la idea es similar: intentaremos elegir los parámetros de la transformación (8) de modo que se anulen los coeficientes $\tilde{b}$ y $\tilde{c}$ en (9). De ese modo tendremos una ecuación de la forma $y^3 + \tilde{d} = 0$ que, por supuesto, es muy simple de resolver. A primera vista tenemos mucha libertad para escoger los parámetros (α, β, γ y δ) y cumplir nuestro objetivo, ya que tenemos cuatro parámetros a nuestra disposición y sólo dos coeficientes ($\tilde{b}$ y $\tilde{c}$) que anular. Pero la verdad es que de los cuatro parámetros solamente dos son útiles. En efecto, si observamos la transformación (8), al dividir el numerador y el denominador del lado derecho por δ la transformación se escribe como

$$x = \frac{(\alpha/\delta)y + (\beta/\delta)}{(\gamma/\delta)y + 1} \ . \tag{10}$$

Vemos que hemos perdido ya un parámetro. La segunda observación es que si uno hace el cambio de variables $y = pz$ (es decir, si amplificamos la variable y) en (9) no ganaremos gran cosa en nuestro intento por hacer desaparecer los coeficientes: de hecho lo único que les sucede a los "pobres" coeficientes ante tal cambio de variable es que se amplifican. En consecuencia, la transformación más general del tipo (8) que podemos hacer con el objeto de eliminar los coeficientes de los términos lineal y cuadrático es

$$x = \frac{(\alpha/\gamma)z + (\beta/\delta)}{z+1} ,$$

habiendo denominado $(\gamma/\delta)y = z$, en virtud de la segunda observación anterior. Podemos ahora llamar $A = \alpha/\gamma$, $B = \beta/\delta$, de modo que nuestra transformación más general es de la forma

$$x = \frac{Az + B}{z+1} \tag{11}$$

y, como espero haberlos convencido, tenemos sólo dos coeficientes disponibles (A y B) para cumplir nuestro objetivo. Reemplazando (11) en (4), obtenemos la ecuación cúbica para z:

$$(A^3 + bA^2 + cA + d)z^3 + Pz^2 + Qz + (B^3 + bB^2 + cB + d) = 0 , \tag{12}$$

con los coeficientes P y Q dados por

$$P = 3A^2B + b(A^2 + 2AB) + c(B + 2A) + 3d$$

y

$$Q = 3AB^2 + b(B^2 + 2AB) + c(A + 2B) + 3d .$$

Deseamos elegir A y B de modo que $P = 0$ y $Q = 0$, vale decir, A y B son solución de las ecuaciones:

$$3A^2B + b(A^2 + 2AB) + c(B + 2A) + 3d = 0 , \tag{13}$$

y

$$3AB^2 + b(B^2 + 2AB) + c(A + 2B) + 3d = 0 . \tag{14}$$

Restando (14) de (13):

$$3AB + b(A + B) + c = 0 . \tag{15}$$

Para llegar a esta relación hemos simplificado por $(A - B)$, suponiendo que $A \neq B$. Luego multiplicamos (13) por B, (14) por A y restamos, para obtener

$$bAB + c(A + B) + 3d = 0 , \tag{16}$$

donde nuevamente hemos simplificado por $(A - B)$. (15) y (16) son ecuaciones lineales para $A + B$ y AB. Resolviéndolas encontramos

$$A + B = \frac{9d - bc}{b^2 - 3c} \qquad \text{y} \qquad AB = \frac{c^2 - 3db}{b^2 - 3c} . \tag{17}$$

El sistema (17) es fácil de resolver para A y B. En efecto,

$$A = \frac{1}{2}\left(S + \sqrt{S^2 - 4T}\right) \qquad \text{y} \qquad B = \frac{1}{2}\left(S - \sqrt{S^2 - 4T}\right) ,$$

donde S y T denotan los lados derechos que aparecen en (17), es decir

$$S \equiv \frac{9d - bc}{b^2 - 3c} \qquad \text{y} \qquad T \equiv \frac{c^2 - 3db}{b^2 - 3c} .$$

Conociendo A y B podemos finalmente encontrar z, a partir de (12), recordando que $P = Q = 0$:

$$z^3 = -\frac{B^3 + bB^2 + cB + d}{A^3 + bA^2 + cA + d} .$$

Por último, la incógnita x está dada en términos de z a través de (11). Nótese que la solución hallada vale siempre que $b^2 - 3c \neq 0$. Sin embargo, en este último caso la cúbica es simple de resolver directamente, completando el cubo en el lado derecho de (4). En efecto, la ecuación (4) se puede escribir como

$$\left(x + \frac{b}{3}\right)^3 = \frac{b^3}{27} - d ,$$

de donde se despeja fácilmente x.

Esta solución de la cúbica, usando la transformación (8) (o más bien la transformación (11)) puede parecer complicada en un principio, pero tiene la gracia de que el mismo método lo podemos aplicar para resolver la cuártica y para entender por qué no se puede resolver en general la ecuación de quinto grado.

Lodovico Ferrari: matemático italiano. Nació en Bolonia en 1522 y murió en 1560 (ó 1565, según algunos autores). Fue alumno de Cardano. Fue el primero en resolver la ecuación algebraica general de cuarto grado. Su solución fue publicada en el *Ars Magna* de Cardano. Fue profesor de matemáticas en Bolonia.

La ecuación cuártica es de la forma

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 . \tag{18}$$

Como en el caso de la cúbica, la cuártica mantiene su forma al hacer la transformación (8) (en realidad nos interesa sólo (11)). Al hacer la transformación (11) la nueva ecuación tiene la forma

$$z^4 + \tilde{b}z^3 + \tilde{c}z^2 + \tilde{d}z + \tilde{e} = 0 , \tag{19}$$

en que los coeficientes $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, etc., dependen tanto de los coeficientes b, c, d, e como de los parámetros A y B de la transformación (11). Tenemos dos parámetros a nuestra disposición, así que, en principio, solamente podemos anular dos de los cuatro coeficientes de (19). ¿Cuáles conviene anular para resolver la cuártica? La única posibilidad es anular $\tilde{b}$ y $\tilde{d}$, de modo que (19) se convierta en una cuadrática para z^2, la cual, por supuesto, sabemos resolver. Al imponer que $\tilde{b}$ y $\tilde{d}$ se anulen uno encuentra finalmente una cúbica para A (o para B), la cual a estas alturas ya sabemos resolver. Aquí no haremos ningún detalle, pero es un buen ejercicio para el lector interesado.

¿Qué sucede con la ecuación de quinto grado? Bueno, repitiendo el proceso y usando la invariancia bajo la transformación (11), nos encontramos con una ecuación de la forma

$$z^5 + \tilde{b}z^4 + \tilde{c}z^3 + \tilde{d}z^2 + \tilde{e}z + \tilde{f} = 0 \ ,$$

y, tal como antes, tenemos dos parámetros a nuestra disposición para eliminar (a lo más dos, por supuesto) coeficientes. Pero, al contrario de lo que ocurría con las ecuaciones cúbica y cuártica, en el caso de la quíntica, incluso si anulamos dos coeficientes cualesquiera de los cinco originales no obtenemos algo soluble. (Uno podría estar tentado en hacer $\tilde{f} = 0$, pero eso es equivalente a resolver la cuártica original.) De modo que lamentablemente la quíntica no la podemos resolver, por este método al menos. Niels Abel demostró, en 1828, que la quíntica general no se puede resolver en términos de operaciones simples, como hemos dicho más arriba [1,2].

Niels Henrik Abel: matemático noruego. Nació en Findöe en 1802 y murió en Arendal en 1829. Abel hizo importantes contribuciones a la teoría de funciones elípticas. A él se debe la demostración de que una solución algebraica de la ecuación de quinto grado es imposible.

Evariste Galois: Matemático francés. Nació en París en octubre de 1811 y murió en mayo de 1832. Estudió en L'École Normale de París. Tuvo una juventud muy agitada por sus ideas políticas. Murió en un duelo a los 20 años de edad. Hizo importantes contribuciones a la Teoría de Grupos, y a él se debe bastante de la teoría moderna de Ecuaciones Algebraicas.

Las ecuaciones algebraicas han atraído la atención de numerosos matemáticos. La idea de la demostración aquí presentada ha sido introducida por varios autores. En particular, el matemático contemporáneo Mark Kac (1914–1984) escribió su primer artículo, a los 16 años, precisamente sobre un nuevo método de solución de la ecuación cúbica

[10]. Existe un relato interesante sobre la motivación de Mark Kac al considerar las ecuaciones algebraicas en su reciente autobiografía [8]; en particular, la historia sobre su primer artículo, y cómo ello influyó sobre su futura carrera como matemático, constituye el prólogo de su libro [8] y es una reproducción de un artículo anterior [9].

Agradecimientos

Agradezco la colaboración de René Vidal por la confección del programa que acompaña a este artículo y a María Cristina Depassier por una revisión cuidadosa del contenido de éste.

Referencias:

1. *Oeuvres Complètes*, Niels Henrik Abel, 2 vols. editados por L. Sylow y S. Lie, Grondahl & Sons, Christiania, 1881.
2. *Men of Mathematics*, E. T. Bell, Simon & Schuster, New York, 1937.
3. *The Great Art or the Rules of Algebra*, Girolamo Cardano, MIT Press, Cambridge, MA, 1968. Traducción del original *Ars Magna, sive de regvlis algebraicis, liber vnvs*, Nürnberg, 1545.
4. *Great Moments in Mathematics, Before 1650*, Howard Eves, publicado por The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, no. 5, 1983.
5. *Ecrits et Mémoires Mathématiques*, Evariste Galois, editado por R. Bourgne y J. P. Azra, Gauthier-Villars, París, 1962.
6. *Field Theory and its Classical Problems*, Charles Robert Hadlock, The Carus Mathematical Monographs, no. 19, publicado por The Mathematical Association of America, 1978.
7. *Higher Algebra, A Sequel to Elementary Algebra for Schools*, H. S. Hall y S. R. Knight, Mc. Millan & Co. Ltd., Londres, 1960 (primera edición, 1887).
8. *Enigmas of Chance, An Autobiography*, Mark Kac, Harper & Row, Publishers, New York, 1985, pp. 1–5.
9. *How I Became a Mathematician*, Mark Kac, Rehovot, **9**, no. 2 (1981/82).
10. *O nowym sposobie rozwiazywania równán stopnia trzeciego*, Mark Kac, Młody Matematyk, **1**, 69–71 (1931).
11. *History of Mathematics*, vol. 1, *General Survey of the History of Elementary Mathematics*, David Eugene Smith, Dover, New York, 1958.

N.R.: El Profesor Rafael Benguria obtuvo su PhD en la Universidad de Princeton (Nueva Jersey) en el año 1979. En la actualidad es Profesor Titular de la Pontificia Universidad Católica de Chile e investigador en Física- Matemática.