En memoria de Sergio Plaza

Construcciones geométricas solo con compás

En esta nota se presenta el Teorema de Mohr-Mascheroni: "Todas las construcciones geométricas posibles con regla y compás, pueden hacerse utilizando sólo el compás".

Ricardo Menares

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,
apoyado por el proyecto FONDECYT 11110225

Introducción

Los problemas de construcciones geométricas por medio de la regla y el compás conforman un tema clásico de la geometría euclidiana. Además, se trata de una herramienta útil para introducir el razonamiento matemático a nivel escolar. En este contexto se utiliza la regla como un instrumento de borde recto, es decir, para trazar líneas rectas, no para medir o señalar distancias.

Un ejemplo básico de tales construcciones es la siguiente.
Dado un trazo $\overline{AB}$, *construir su punto medio.* (Ver Figura 1).

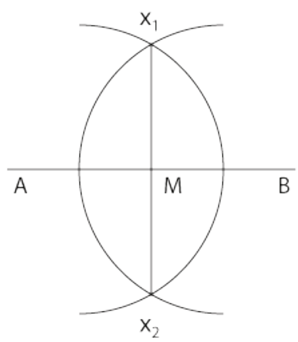

Figura 1:

Llamemos M al punto medio buscado. El compás permite trazar el círculo de centro A y radio AB. Una operación similar permite trazar el círculo de centro B y radio AB, produciendo dos puntos de intersección, X_1 y X_2 . Usando la regla, podemos trazar el segmento de recta que une X_1 con X_2. El punto M buscado se obtiene como intersección de esta recta con el trazo original. La validez de esta construcción sigue del hecho que las diagonales de un paralelógramo se dimidian.

En esta nota, invitamos el lector a repensar el problema anterior pero con un instrumento menos: *no se puede usar la regla*. En otras palabras, ¿es posible encontrar el punto M usando sólo el compás?

Veremos que no sólo la respuesta es afirmativa. Más aún, *todas las construcciones posibles de hacerse con regla y compás son también posibles de hacer sólo con el compás*. Este sorprendente hecho fue demostrado independientemente por G. Mohr (1672) y L. Mascheroni (1797), de manera que se conoce como Teorema de Mohr-Mascheroni,. Su demostración consiste en un análisis caso a caso de ciertas construcciones básicas, siendo este método el que presentaremos (cf. [Kos], 1-2, esta bella obra también considera los problemas que se originan al imponer otras restricciones sobre los instrumentos autorizados). A. Adler en 1890 propuso una demostración distinta usando el método de inversión (cf. [CoRo], III, $\mathbb{S}$ 5 o [Kos], 1-4).

Mohr publicó un libro explicando su demostración, con versiones en danés y holandés, que fue ignorado y olvidado (probablemente por no haber sido escrito en latín). Mascheroni, más de cien aos después, redescubrió el teorema de manera independiente. Parece ser que parte de su motivación residía en la idea que el compás es un instrumento de alta precisión, no así la regla (cf. el comentario de Dieudonné sobre [Ma] en Mathreviews). El libro de Mohr resurgió a la luz en 1928, cuando un estudiante lo encontró en una tienda de libros de segunda mano en Copenhague.

Por motivos de espacio y también como una manera de motivar al lector, las construcciones sólo con compás que presentaremos no incluyen la demostración de su veracidad. Proponemos al lector ambicioso suplir las demostraciones que faltan o consultar la bibliografía. Además, finalizaremos con un listado de problemas propuestos. El problema propuesto 3 esboza el método de inversión.

Agradecimientos. Este artículo debe su existencia tanto a Sergio Plaza, a cuya memoria va dedicado, como a los editores actuales de esta revista. Eder Contreras prestó valiosa ayuda por medio de correcciones y sugerencias.

Guía para la demostración del Teorema de Mohr-Mascheroni

En lo que sigue, convendremos que un trazo $\overline{AB}$ está construído si los puntos A y B están determinados. En los dibujos, a veces aparecerán rectas, pero sólo para facilitar la exposición, no son necesarias para la construcción.

La observación básica de Mascheroni es que cada construcción hecha con regla y compás puede ser reducida a la concatenación de un número finito de las siguientes construcciones básicas:

A) Dibujar un círculo de centro y radio dados.

B) Encontrar los puntos de intersección de dos círculos dados.

C) Encontrar los puntos de intersección de un círculo dado con una recta dada, definida ésta por dos puntos.

D) Encontrar el punto de intersección de dos rectas, cada una determinada por dos puntos dados.

Por lo tanto, bastará con resolver cada problema de la lista usando sólo el compás. Los problemas A) y B) son inmediatos. En lo que sigue, nos concentraremos en los problemas C) y D).

Denotamos por $C(A, r)$ la circunferencia con centro en el punto A y radio $r \geq 0$. Dados dos puntos distintos A, B, $C(A, B)$, denotará la circunferencia de centro A y que pasa por B. $\overline{XY}$ es el trazo determinado por los puntos X e Y. $C(A, B) \cap C(C, D) = \{D_1, D_2\}$, quiere decir que los puntos D_1 y D_2 se obtienen como la intersección de $C(A, B)$ con $C(C, D)$.

A continuación presentamos una serie de construcciones elementales que permitirán resolver los problemas C) y D).

1. *Inversión con respecto a una recta.* Dado un trazo $\overline{AB}$ y un punto P fuera de él, diremos que P' será el punto simétrico de P con respecto a $\overline{AB}$, si $P \neq P'$, la distancia desde P a $\overline{AB}$ es la misma que la desde P' a $\overline{AB}$ y $\overline{PP'}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Dados P, A y B, se construye P' como $C(A,P) \cap C(B,P)$(Figura 2)

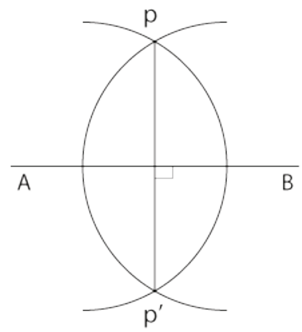

Figura 2:

Observación. Para verificar si tres puntos A, B, X son colineales, basta tomar un punto arbitrario, P, fuera de $\overline{AB}$, construir su punto simétrico, P' y verificar la veracidad de $PX = P'X$.

2. *Construir un segmento n veces más grande que un segmento dado* $\overline{AA_1}$, $n = 2, 3, \cdots$ (ver Figura 3). Consideramos $B \in C(A_1, AA_1) \cap C(A, AA_1)$, $C \in C(A_1, AA_1) \cap C(B, AA_1)$. En la intersección $C(C, AA_1) \cap C(A_1, AA_1)$ se encuentra un punto A_2 tal que $AA_2 = 2AA_1$. Este proceso puede ser iterado, construyendo A_3 tal que $AA_3 = 3AA_1$, y así sucesivamente.

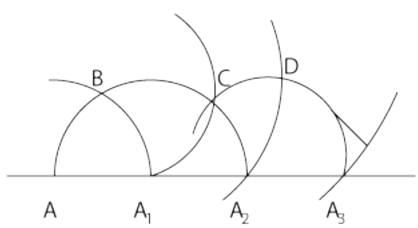

Figura 3:

3. El valor x se dice una cuarta proporcional geométrica, en adelante c.p.g., de los valores a, b, c si se cumple $a : b = c : x$. Construiremos x partir de a, b, c, dividiendo el problema en dos casos:

i) $c < 2a$ (Figura 4)

Se trazan $C(O,a)$ y $C(O,b)$, siendo O un punto cualquiera en el plano. Elegimos A arbitrariamente sobre $C(O,a)$ y hacemos $B = C(O,a) \cap C(A,c)$. Luego, con un radio arbitrario d, se trazan $C(A,d)$ y $C(B,d)$, obteniéndose los puntos A_1 y B_1, respectivamente, al intersectar con $C(O,b)$. Tenemos $A_1B_1 = x\,,\;\; a : b = c : x\,.$

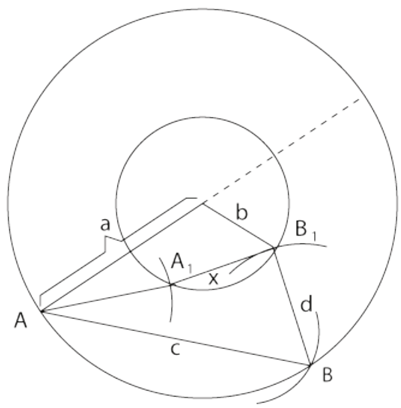

Figura 4:

ii) $c \geq 2a$. Usando la construcción 2, obtenemos a' tal que $a' = na$ y n es suficientemente grande para que $c < 2a'$. Así, usamos la parte i) para encontrar la cuarta proporcional geométrica de a', b, c, a la que llamaremos y $\;(a' : b = c : y)$. Luego construimos $x = ny$ y se tendrá $a : b = c : x$.

4. Dividir el arco $\widehat{AB}$ de un círculo en la mitad, asumiendo que el centro O está dado (Figura 5).

Sean $OA = OB = r$ y $AB = a$. Dibujamos $C(O,a), C(A,r)$ y $C(B,r)$, obteniendo como intersección los puntos C y D.

Dibujamos $C(C,B)$ y $C(D,A)$, que se intersectan en E. Además se tiene $\{X, X_1\} = C(C,OE) \cap C(D,OE)$. Se tendrá que X divide a $\widehat{AB}$ en la mitad y X_1 divide a su suplemento en la mitad.

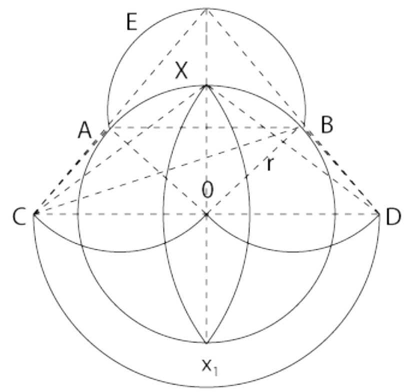

Figura 5:

5. Construir los puntos de intersección de una circunferencia dada (centro O y radio r) con una recta definida por dos punto A y B (esta construcción resuelve el problema C)).

   Dividiremos el problema en dos casos, en función de la posibilidad que A, B y O sean colineales. Notar es posible decidir en qué caso nos encontramos usando sólo el compás (cf. la observación después de la construcción 1).

   i) Cuando O no es colineal con A, B (Figura 7).
   Contruimos O_1 el punto simétrico de O con respecto de $\overline{AB}$. Sean $\{X_1, X_2\} = C(O,r) \cap C(O_1, r)$. Es claro que X_1 y X_2 son los puntos de intersección requeridos.

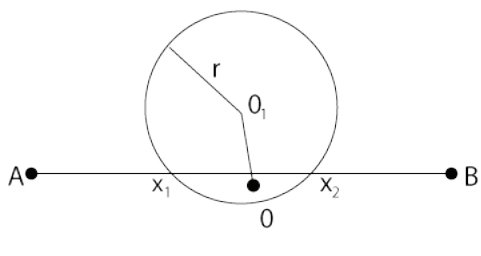

Figura 7:

   ii) Cuando O, A, B son colineales (Fig. 8) Con un radio R, adecuado, obtenemos $\{E_1, E_2\} = C(O,r) \cap C(A, R)$. Luego se divide el arco $\widehat{E_1E_2}$ y su suplemento en mitades (Problema 4). Así obtenemos los puntos Y_1, Y_2, que son los requeridos.

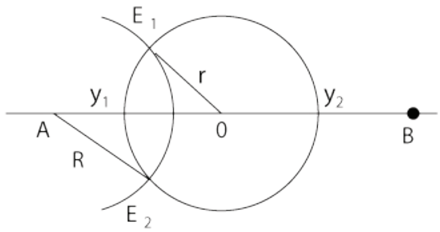

Figura 8:

6. Construir el punto de intersección de dos rectas, cada una definida por dos puntos A, B y C, D, respectivamente (esto resuelve el problema D)).

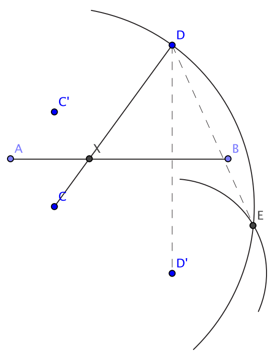

Figura 9

Se construyen los puntos simétricos de C y D con respecto a $\overline{AB}$, C' y D', respectivamente (vea Figura 9). Luego hacemos $E = C(D', CC') \cap C(C, D)$, entonces se construye x como la c.p.g. de DE, DD'y CD (Problema 3). Luego el punto buscado X se encuentra en $C(D, x) \cap C(D', x)$.

Problemas propuestos

1. Encontrar el centro de un círculo del que se conoce su circunferencia, usando regla y compás
2. Considere el problema de encontrar el punto medio de un segmento, resuelto en la introducción utilizando regla y compás. Es posible evitar el uso de la regla usando la solución del problema D). De seguir ese método, es necesario trazar al menos 15 círculos. Encuentre un método que permita encontrar el punto medio, usando sólo el compás, que requiera menos círculos.
3. *El método de inversión con respecto a un círculo.* Sea C un círculo de radio r y centro O. Sea P un punto distinto de O. Diremos que P' es el inverso de P con respecto a C si $OP \cdot OP' = r^2$.

   a) Dados O, P y r, construya P' sólo con compás. Si supone que $OP > r$, puede dar una construcción que requiera a lo más tres círculos?

   b) Usando lo anterior, resuelva el problema 2 trazando a lo más 7 círculos.

   c) Resuelva el problema 1 sólo con el compás, trazando a lo más 7 círculos.
4. Demuestre que el segmento x obtenido en la construcción propuesta más arriba es efectivamente una c.p.g.
5. Dado un segmento $\overline{AB}$, encontrar la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por A, usando sólo el compás.

Referencias

[CoRo] Courant, Richard and Robbins, Herbert, *What is mathematics?*, An elementary approach to ideas and methods, Oxford University Press, New York, 1979

[Kos] Kostovskiĭ, A. N., *Geometricheskie postroeniya odnim tsirkulem na ploskosti i odnim lish sferografom* v prostranstve. *Geometric constructions with a compass on a plane and with only a spherograph in space*, Populyarnye Lektsii po Matematike [Popular Lectures on Mathematics], 29,"Nauka", Moscow, 1989.

[Ma] Mascheroni, L., *Géométrie du compas*, Monom, Coubron, 1980.