Cuadrados mágicos y matrices mágicas

Sonia Acuña Cirsini, Liceo Santa Teresita de Talca
María Antonia Arellano, Liceo Politécnico de San Javier
Rosa Baraona Venegas, Colegio Integrado San Pío X de Talca

Introducción

Un interesante y entretenido tema que ha atraído la atención de muchos matemáticos y aficionados a la matemática, ha sido la construcción de cuadrados mágicos. Esta antigua entretención que data de más de 3000 años, se ha constituido en un pasatiempo y un desafío al ingenio y a la paciencia.

Los primeros cuadrados que fueron considerados mágicos, eran arreglos de los primeros n^2 números naturales, sin repetir ninguno de estos números, dispuestos en las n^2 casillas de un cuadrado de n filas y n columnas de tal manera que los números de cada fila, de cada columna y de cada una de las dos diagonales suman el mismo número. El nombre de mágico se les atribuye debido a las extrañas e interesantes propiedades que poseen estos arreglos.

Los matemáticos que han estudiado los cuadrados mágicos, más allá de un pasatiempo, han descubierto muchas propiedades y fórmulas para su construcción, algunas de las cuales se presentarán en este trabajo.

El estudio de tales arreglos, constituye un interesante tema para trabajar con estudios de enseñanza básica y media, ya que el alumno puede descubrir relaciones entre filas, subcuadrados, columnas, etc. aplicando sencillas operaciones de aritmética. El trabajo con cuadrados mágicos los entretiene y motiva el estudio de la matemática y les permite desarrollar su creatividad e ingenio.

En este artículo se entregarán algunos antecedentes históricos sobre los orígenes y el significado de los cuadrados mágicos, métodos para su construcción y su generalización llevada a matrices mágicas.

Se ha puesto énfasis en la relación de este tema con la práctica docente, mostrando algunas actividades entretenidas sobre cuadrados mágicos, que se pueden desarrollar con los alumnos.

Antecedentes Históricos

Todo parece indicar que los primeros en descubrir los cuadrados mágicos fueron los chinos. El primer cuadrado mágico que se tiene conocimiento, denominado **Lu Shu**, es atribuido al mítico chino Fuh-Hi. Una curiosa leyenda cuenta que este cuadrado mágico (ver figura 1), fue revelado al hombre, por primera vez, en el caparazón de una tortuga que emergió de las aguas del río *Loh*, en la cual se encontraba inscrita la configuración geométrica que se muestra más abajo.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

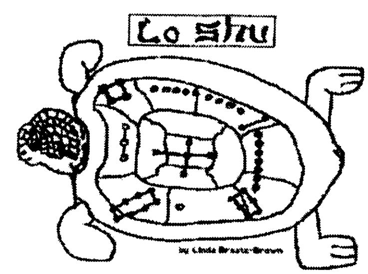


Figura 1

Los chinos atribuyeron a sus propiedades matemáticas un significado místico, a tal punto que se convirtió en el símbolo que reunía los principios básicos que dieron forma a las cosas, a los humanos y al universo. Los números impares son expresados por puntos blancos (emblema del cielo) y los pares por puntos negros (emblema de la tierra).

Desde China llegaron a la India noticias de los cuadrados mágicos, de donde posteriormente pasaron a Occidente, probablemente por medio de los árabes.

Durante el renacimiento, el matemático Cornelio Agrippa (1486-1535) se dedicó a la construcción de cuadrados mágicos de orden n, en los cuales aparecen los números naturales del 1 a n^2, para n igual a 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9, y les atribuyó un significado astronómico. Representan simbólicamente a Saturno, Marte, el Sol, Venus, Mercurio y la Luna.

Un cuadrado mágico de orden cuatro, formado con los 16 primeros números naturales se encuentra en la obra **Melancolía** del pinto Alberto Durero, que data del año 1514 (ver figura 2). En las casillas centrales de la última fila, el cuadrado mágico reproduce el año de la creación del grabado.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En los siglos XVI y XVII se creía que un cuadrado mágico grabado o escrito sobre una pequeña placa o chapa de plata, tenía poderes contra la peste.

Cuadrados mágicos

A continuación se describirán ciertos tipos de cuadrados mágicos, algunos métodos de construcción y relacionados con estos arreglos.

1. Cuadrados mágicos normales

Los cuadrados mágicos de orden n, denominados *normales*, son aquellos formados por los n^2 primeros números naturales, cuyas filas, columna y diagonales suman el mismo número. Esta suma S es llamada *constante mágica.*

Por ejemplo:

- Un cuadrado mágico de orden 3, formado por los números naturales del 1 al 9 es:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Las constante mágica es $S = 15$.

- El cuadrado mágico de orden 5, formado por los primeros 25 números naturales:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

La constante mágica es $S = 65$.

Un problema interesante es: determinar la constante mágica S de un cuadrado mágico normal de orden n.

Para el caso $n = 5$ la suma de todas las casillas del cuadrado es:

$$S_5 = 1 + 2 + \cdots + 5^2 = 25\left(\frac{25+1}{2}\right) = 325\,.$$

Luego, la constante mágica S de este cuadrado mágico de orden 5 es: $S = \dfrac{325}{5} = 65$.

Generalizando, para un cuadrado mágico normal de orden n, se tiene:

$$S_n = 1 + 2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Luego, la constante mágica es: $S = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

- Un cuadrado mágico normal de orden 4 es por ejemplo:

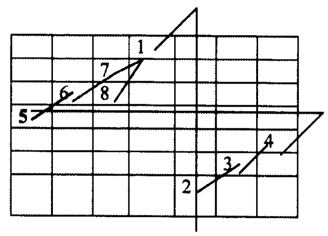
4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

A continuación se mostrarán algunos métodos o técnicas para construir cuadrados mágicos normales.

a) *Método para construir de orden impar.*

- Se construye la tabla, según el orden del cuadrado.
- Se ubica en la primera fila y al centro de ella el número 1.
- Los movimientos, para ubicar los otros números son en diagonal.
- Si el número se sale por la derecha de una fila, entonces dicho número se ubica al comienzo de esta fila.
- Si el número se sale sobre una columna, entonces se ubica al final de dicha columna.
- Si cae sobre una posición ocupada, ó sale por la esquina del cuadrado, se escribe bajo el número anterior.

Para ejemplificar, se construirá un cuadrado mágico de orden 7, con los primeros 49 números naturales, usando este método. Notar que la suma S de cada fila es 175.



b) *Método para construir cuadrados de orden 4, y de orden múltiplos de 4.*

En primer lugar se presentará un método para construir un cuadrado mágico de orden 4:

- Se construye la tabla.
- Se coloca un punto en cada casilla de las dos diagonales del cuadrado.
- En cuadrado se comienza a llenar por la primera fila, la primera celda partiendo del 1.
- Si la celda tiene un punto, el número se contabiliza, pero no se escribe.

·	2	3	·
5	·	·	8
9	·	·	8
9	·	·	12
·	14	15	·

- Para completar el cuadrado se ubican los números en forma decreciente (comenzando con el mayor que es 16) partiendo por la primera celda de la primera fila. Si la celda está ya ocupada el número se contabiliza pero no se escribe.

Obteniendo el cuadrado:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

El general, para construir cuadrados *mágicos normales* de orden 4, se procede de la misma forma, subdividiendo el cuadrado en cuadrados de orden 4, marcando un punto en cada elemento de las diagonales de los subcuadrados. Para ejemplificar se construirá un cuadrado mágico de orden 8:

·	2	3	·	·	6	7	·
9	·	·	12	13	·	·	16
17	·	·	20	21	·	·	24
·	26	27	·	·	30	31	·
·	34	35	·	·	38	39	·
41	·	·	44	45	·	·	48
49	·	·	52	53	·	·	56
·	58	59	·	·	62	63	·

Obteniendo el cuadrado mágico:

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Notar que, los métodos presentados permiten cosntruir cuadrados de órdenes: $2n+1$ y $4n$, para todo número natural n. En general, para órdenes $4n, 4n+1$ y $4n+3$.

Problemas

a) ¿Existen cuadrados mágicos *normales* de orden 2? Justificar.

b) ¿Para qué valores de n, no se ha descrito un método para construir un cuadrado mágico de orden n ?

2. Cuadrados mágicos de orden n^2

Posteriormente, se extendió el concepto de cuadrado mágico de orden n, a los arreglos cuadrados de n^2 números naturales consecutivos, dispuestos de tal manera que los números de cada fila, de cada columna y cada diagonal suman el mismo número.

Un método algebraico para construir cuadrados mágicos de orden 3 se presenta en la siguiente tabla:

m+3	m-4	m+1
m-2	m	m+2
m-1	m+4	m-3

siendo m un número natural mayor que 4

Problemas

a) Denotar por t al menor número del cuadrado anterior, es decir $t = m - 4$. Contruir un cuadrado en términos de t, y determinar la suma constante S de cada fila (columna, diagonal) en función de t.

b) Construir un cuadrado mágico de este tipo tal que el número correspondiente a la casilla ubicada en la tercera fila, segunda columna, sea 29.

c) Extendiendo el concepto de cuadrado mágico, a un arreglo con n^2 número enteros en progresión aritmética, tal que los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sumen el mismo número S. Determinar la suma S, si el menor entero del arreglo es m y la diferencia constante de la progresión aritmética es d.

3. Cuadrados casi-mágicos

Otros cuadrados que han sido estudiados son los cuadrados casi-mágicos. Estos son arreglos de n^2 números dispuestos en las casillas de un cuadrado de n filas y n columnas, tal que sus filas y columnas suman lo mismo. Algunos de estos cuadrados son los siguientes.

a) **Cuadrado de Franklin:** Este cuadrado es de orden 8, formado con los 64 primeros números naturales:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Curiosidades de este cuadrado.

- Si en cada fila nos detenemos en la mitad, a cada lado los números suman 130.
- Si desde la mitad de cada fila trazamos líneas a las diagonales, los números suman 260. (considerando las dos líneas)
- Los números de las cuatro esquinas, más los cuatro números del centro del cuadrado suman 260.
- La suma de cuatro casillas, en subcuadrados de orden 2, es 130.
- La suma de cuatro números equidistantes del centro del cuadrado es 130.

b) *"Cuadrado para un caballo"de Leonhard Euler:* cuadrado de orden 8 (un tablero de ajedrez) en el cual la suma de cada fila, y de cada columna es 260.

Curiosidades de este cuadrado.

- Si se comienza de la casilla del 1 y se realizan los asaltos del caballo de ajedrez, se recorren las 64 casillas consecutivamente

- Los cuatro cuadrados de orden 4, que son casi cuadrados mágicos. La suma de cada fila y cada columna es 130.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

<u>Observaciones.</u> A partir de un cuadrado mágico (o casi-mágico), se pueden obtener nuevos cuadrados mágicos (o casi-mágicos). En efecto,

◇ Si a cada número de un cuadrado mágico se le suma (o resta) un mismo número entero, el cuadrado que se obtiene es también mágico.

◇ Si cada número de un cuadrado mágico se multiplica (divide) por un mismo número entero, el cuadrado que se obtiene es mágico.

◇ Adjuntando cuadrados mágicos del mismo orden n, se puede construir cuadrado mágicos de orden $2n$.

◇ Si un cuadrado mágico se somete a rotaciones de $k \cdot 90^0$ (k entero), con respecto al centro del cuadrado, se obtiene un cuadrado mágico.

◇ Si se somete a reflexiones con respecto a cada una de las paralelas medias del cuadrado y de las diagonales, se obtiene un cuadrado mágico.

Considerando las observaciones anteriores, el problema es contruir patrones de cuadrados mágicos, ya que a partir de éste, se obtienen nuevos cuadrados mágicos derivados.

Problemas

a) Construir otros modelos de cuadrados mágicos (normales) de orden 3 y de orden 4.
Nota: Existen 220 patrones o también llamados cuadrados mágicos fundamentales de orden 4.

b) Construir un cuadrado mágico normal tal que su constante mágica sea un número cercano a 15000.

Matrices mágicas

El trabajo con cuadrados mágicos se enriquece tratándose matricialmente, ya que de esta manera se le incorpora toda la potencia de los métodos y técnicas del álgebra lineal.

Una matriz mágica es una matriz cuadrada con entradas reales, en la cual todas las filas columnas y diagonales tienen la misma suma. Dicha suma también es llamada *constante mágica.*

Considerar la matriz mágica de orden 3: $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ cuya constante mágica es 15.

- Notar que, si se multiplica cada elemento de la matriz A por $\sqrt{5}$ (por ejemplo), se obtiene la matriz $\sqrt{5}\,A$, que también es mágica.

  En general, si A es una matriz mágica, entonces $k \cdot B$ es también una matriz mágica del mismo orden, para todo número real k.

- Sea $B = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 12 \\ 9 & 11 & 13 \\ 10 & 15 & 8 \end{pmatrix}$ otra matriz mágica de orden 3. Notar que

$A + B$ también es una matriz mágica.

En general, si A y B son matrices mágicas del mismo orden, entonces $A + B$ también es mágica. Un caso particular es cuando cada entrada o componente de B es el mismo número.

- La matriz cero de orden n es mágica, ya que sus filas, columnas y diagonales suman cero.

Si se denota por $MM(n)$ al conjunto de todas las matrices mágicas de orden n, se puede demostrar que: el conjunto $MM(n)$ es un subespacio del espacio vectorial de las matrices reales de orden n.

Un problema interesante en este contexto es, caracterizar el subespacio $MM(n)$ y obtener su dimensión.

Caracterización del conjunto de matrices mágicas de orden tres: $MM(3)$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ una matriz de orden 3 con componentes (entradas) reales.

Se tiene que: A es mágica si, y sólo si: $\begin{cases} a+b+c = d+e+f \\ a+b+c = g+h+i \\ a+b+c = a+d+g \\ a+b+c = b+e+h \\ a+b+c = c+f+i \\ a+b+c = a+e+i \\ a+b+c = c+e+g \end{cases}$

Resolviendo el sistema formado por siete ecuaciones lineales en nueve variables, se obtiene (por ejemplo) que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -a-b+3e \\ -2a-b+4e & e & 2a+b-2e \\ a+b-e & 2e-b & 2e-a \end{pmatrix}$$

y, la dimensión del subespacio $MM(3)$ es 3.

Caracterización del conjunto de matrices mágicas de orden cuatro: $MM(4)$.

De manera análoga, se obtiene que:

Una matriz $A = \begin{pmatrix} a & bc & d & \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$ de orden cuatro es una matriz mágica,

si, y sólo si,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & a+b+c+d-e-f \\ i & a-d+e-g+i & b+c+2d-e-f-i & f+g-i \\ b+c+d-e-i & c+2d-e-f+g-i & a-c-d+e+f-g+i & -d+e+i \end{pmatrix}$$

y, la dimensión del subespacio $MM(4)$ es 8.

Usando DERIVE (u otro software de propósitos matemáticos), se puede determinar la dimensión del subespacio de matrices de orden 5, 6, etc.

Resumiendo lo anterior:

n	$\dim(MM(n))$
3	3
4	8

5	15
6	24
7	35

Los cálculos son largos, aún usando DERIVE. Sin embargo, la obtención de las dimensiones de $MM(n)$ para ciertos valores consecutivos de n permite conjeturar que una fórmula que modela la dimensión de $MM(n)$ es una función cuadrática en la variable n.

Suponiendo que $dim(MM(n)) = sn^2 + tn + h$ se obtiene: $s = 1, t = -2$ y $h = 0$, considerando los resultados presentados en la tabla.

Luego, se puede conjeturar que la dimensión del subespacio de las matrices mágicas de orden n es

$$dim(MM(n)) = n^2 - 2n\,.$$

Actividades sugeridas

1. Recopilar información en la Internet sobre el tema: cuadrados mágicos y algunos antecedentes históricos. Palabras claves: cuadrado mágico, magic square.

2. Dado el cuadrado de orden 3:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

   (a) Determinar la suma de las entradas de cada fila, columna y diagonal.

   (b) Encontrar 6 cuadrados mágicos, utilizando los mismo números.

   (c) Crear otros cuadrados de orden 3, a partir del cuadrado dado, sumando, restando y multiplicando cada celda por un mismo número entero, y en cada caso encontrar la constante mágica.

   (d) Determinar, usando el cuadrado dado:

      i. La suma de los cuadrados de los elementos de cada fila, y comparar dichas sumas.

      ii. Hacer lo mismo para las columnas y diagonales. Anotar una solución.

(e) Construir un cuadrado mágico, a partir del cuadrado dado, sumando un mismo número a cada casilla o celda, tal que la constante mágica del nuevo cuadrado sea 37.

3. Asignar valores a las variables dadas en el cuadrado:

a-d	a+d-x	a+x
a+d+x	a	a-d-x
a-x	a-d+x	a+d

y determinar si el cuadrado que resulta es mágico.

4. Dados los siguientes cuadrados mágicos:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

a) Observarlos y determinar la suma de las fila, diagonales y columnas de cada uno, y compararlos.

b) Recortarlos, suponerlos.

c) Pedir una conclusión de lo observado.

d) Introducir el concepto de rotación con de 90 con respecto al centro del cuadrado, reflexión con respecto a las diagonales y paralelas medias.

e) Deducir la fórmula para determinar la suma de las filas, diagonales y columnas, en forma guiada.

5. Completar el siguiente cuadrado tal que se forme un cuadrado mágico:

7		2	
	4		
1	11		

Conclusiones

El tema de los cuadrados y matrices mágicas permite trabajar de manera entretenida en distintos ámbitos de la matemática, como aritmética, álgebra y geometría, ya que se pueden generar actividades tendientes a que el alumno desarrolle diversas capacidades y actitudes tales como curiosidad, perseverancia, creatividad, ingenio, autonomía, trabajo colaborativo, lo que le permite mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en el tema. Con temas como el presentado en este trabajo, se fomenta el cariño por la matemática, ya que los alumnos aprenden jugando, explorando, conjeturando, descubriendo propiedades y compartiendo con sus pares.

Las actividades sugeridas en este trabajo son factibles de implementar en distintos niveles, profundizando de acuerdo a las características del grupo curso. Es importante que el alumno valore los aportes de los matemáticos y aficionados a la matemática en el desarrollo y avance en la construcción de cuadrados mágicos y sus aplicaciones en distintos ámbitos de la matemática.

Tenemos claro que este tema se presta para implementarlo computacionalmente, resultando así más motivador para el alumno, permitiendo un desarrollo tecnológico necesario en los tiempos actuales.

Finalmente, agradecemos todas las ideas y sugerencias de la profesora Juanita Contreras S., ellas nos permitieron perfilar de mejor manera este trabajo.

Bibliografía

Direcciones Internet:

a) http://forum.swarthmore.edu/alejandre/magic.square.html

b) http://forum.swarthmore.edu/alejandre/magic.square/franklin/franklin.square3.html

c) http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/MagicSquare.html

d) http://www.geocities.com/CapeCanaveeral/Launchpad/4057/magicsquare.htm

e) http://freespace.irgin.net/mark.farrar1/msqref01.htm (contiene una lista de textos relacionados con el tema)

(1) Aycinea, B (1995). *Cuadrados Mágicos.* Alianza Editorial.

(2) Contreras S., del Pino C. (1998). Apuntes del curso: *álgebra Lineal con DERIVE. (1998). Universidad de Talca .*