HIPERCUBOS

Herbert Massmann
Facultad de Ciencias, Universidad de Chile

El objetivo de este artículo es obtener diversas propiedades de *cubos* en espacios de más de tres dimensiones, sin recurrir a definiciones formales y a argumentaciones matemáticamente rigurosas, sino que generalizando resultados que conocemos para los cubos en tres y menos dimensiones.

Consideremos, por un momento, un trazo de largo L. Tal trazo, que llamaremos *arista*, comienza y termina (vea figura 1), en dos *vértices* (los puntos A y B). La arista es un "objeto" geométrico que existe sobre una línea (o sea, en un espacio de dimensión $N = 1$).

Supongamos ahora que tomamos los dos vértices de la arista y los trasladamos, en forma perpendicular a la línea que los une, una distancia L (ver figura 2). Los dos puntos originales (A y B), junto con los dos nuevos puntos (A' y B') así generados, forman ahora una figura geométrica (llamada *cuadrado*) que es un objeto geométrico que vive en un espacio de dimensión dos. El cuadrado es una figura geométrica que tiene 4 vértices (o esquinas), 4 aristas (o bordes) y 1 cara (superficie o área).

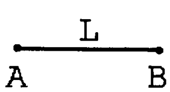

Figura 1

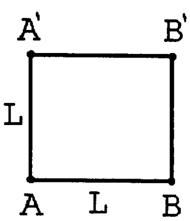

Figura 2

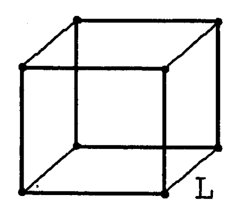

Figura 3

Supongamos ahora que repetimos el procedimiento recién descrito y que tomamos los cuatro vértices del cuadrado y los trasladamos en una dirección perpendicular al plano en que vive el cuadrado, en una distancia L. Los cuatro vértices originales, junto con los cuatro nuevos vértices así generados, forman ahora una figura geométrica llamada *cubo* (ver figura 3). Este cubo vive en un espacio de dimensión $N = 3$. Un cubo (en tres dimensiones) tiene 8 vértices, 12 aristas, 6 caras y 1 volumen.

La tabla siguiente resume las propiedades de las figuras geométricas hasta aquí descritas. Se incluyeron en la tabla también las propiedades del "cubo" en dimensión $N = 0$, es decir, del punto.

	"Hipercubos" en espacios de dimensión N				
Propiedad geométrica (j)	Punto $N = 0$	Trazo $N = 1$	Cuadrado $N = 2$	Cubo $N = 3$	Hipercubo $N = 4$
Vértices $j = 0$	1	2	4	8	?
Aristas $j = 1$	–	1	4	12	?
Caras $j = 2$	–	–	1	6	?
Volúmenes $j = 3$	–	–	–	1	?
Número de aristas que llegan a cada vértice	–	1	2	3	?
Número de caras que llegan a cada arista	–	–	1	2	?

Para ilustrar el uso de la tabla veamos cómo en ella están resumidas algunas de las propiedades del cubo (ver penúltima columna). El cubo es un objeto que vive en un espacio de dimensión $N = 3$. El cubo tiene 8 vértices, 12 aristas y 6 caras que encierran a 1 volumen. De cada vértice del cubo emergen 3 aristas y en cada arista se tocan 2 caras.

Nada nos impide continuar repitiendo el proceso descrito algunos párrafos atrás y tomar ahora los 12 vértices del cubo y trasladarlos en una distancia L, en una dirección perpendicular a todas las tres direcciones espaciales definidas por el cubo. Los 12 vértices antiguos, junto con los 12 nuevos así generados, definen ahora a un objeto en un espacio de dimensión $N = 4$ que llamaremos *hipercubo*. El hecho de que nosotros no podamos imaginárnoslo y no tengamos vivencias en un espacio de cuatro dimensiones espaciales no impide que tales objetos geométricos se puedan describir y estudiar matemáticamente.

El objetivo de este trabajo es encontrar algunas de las propiedades del hipercubo en un espacio de cuatro dimensiones (es decir, $N = 4$) y luego repetir reiterativamente el procedimiento anterior para obtener resultados para hipercubos en dimensiones aun mayores.

Para precisar el lenguaje, denotemos con la letra j a los distintos elementos de un hipercubo usando la convención siguiente:

Elemento	j
Vértice	$j = 0$
Arista	$j = 1$
Cara	$j = 2$
Volumen	$j = 3$
"Hipervolumen"	$j = 4$
$\cdots$	$j = 5$

Sea $M(N,j)$ el número de elementos del tipo j que tiene un "cubo" en un espacio de dimensión N. Por ejemplo, de la tabla se deduce que $M(3,0) = 8$, ya que un cubo en un espacio de dimensión $N = 3$ tiene 8 vértices ($j = 0$); análogamente $M(3,1) = 12$; $M(2,2) = 1$, etc. Deseamos encontrar una expresión general para $M(N,j)$.

Por la manera en que se planteó el enunciado, es obvio que el número de vértices de los "cubos" aumenta al doble cada vez que la dimensión espacial aumenta en una unidad. O sea, un hipercubo en dimensión $N = 4$ tendrá 16 vértices, y en dimensión 5, 32 vértices. No es difícil generalizar este resultado obteniendo el número de vértices (elementos caracterizados por $j = 0$) que tiene un hipercubo en dimensión N. Es evidente que

$$M(N,0) = 2^N .$$

También es evidente que el número de aristas que emergen de cada vértice aumenta en una unidad cada vez que la dimensión espacial aumenta en uno. O sea, el número de aristas que parten de cada vértice en un hipercubo en dimensión N es N.

De la discusión anterior se desprende que un hipercubo en dimensión $N = 4$ tiene 16 vértices y de cada vértice parten 4 aristas. Como cada arista comienza y termina en un vértice, se tiene que un "cubo" en 4 dimensiones debe tener $4 \cdot 16/2 = 32$ aristas.

Un razonamiento análogo nos lleva a que un hipercubo en dimensión $N = 5$ tiene $5 \cdot 32/2 = 80$ aristas. Podemos ahora generalizar este resultado: El número de aristas (elementos caracterizados por $j = 1$) que tiene un hipercubo en dimensión N es

$$M(N,1) = \frac{N \cdot 2^N}{2} = 2^{N-1} N .$$

También el número de caras que emergen de una arista aumenta en una unidad cuando la dimensión espacial aumenta en una unidad. El número de caras que llegan a cada arista en un cubo en dimensión N es $(N-1)$ (es decir, una unidad menos que la dimensión espacial N). En el espacio de 4 dimensiones, en cada una de las 32 aristas se juntan 3 caras. Pero cada cara siempre viene delimitada por 4 aristas, por lo tanto un hipercubo en el espacio $N = 4$ tiene $(3 \cdot 32)/4 = 24$ caras. Un razonamiento análogo nos lleva a que un hipercubo en $N = 5$ tiene $(4 \cdot 80)/4 = 80$ caras.

La expresión general para el número de caras ($j = 2$) de un hipercubo en un espacio de dimensión N es:

$$\begin{aligned} M(N,2) &= \frac{(N-1) \cdot (\text{Número de aristas})}{4} \\ &= \frac{(N-1) \cdot N \cdot 2^{N-1}}{4} = \frac{N(N-1)}{2}\, 2^{N-2} . \end{aligned}$$

Reiterando la argumentación anterior se encuentra que el número de "volúmenes" que emergen de cada cara aumenta en una unidad al aumentar la dimensión en una unidad. El número de volúmenes que tocan cada cara de un hipercubo de dimensión N es $N-2$. Ya sabemos que un hipercubo en dimensión $N=4$ tiene 24 caras. De cada una de ellas emergen 2 volúmenes. Sin embargo, cada volumen está limitado por 6 caras, luego el número de volúmenes ($j=3$) de un hipercubo en el espacio $N=4$ es $(2\cdot 24)/6=8$. La fórmula general en este caso viene dada por:

$$\begin{aligned} M(N,3) &= \frac{(N-2)\cdot(\text{Número de caras})}{6} \\ &= \frac{N(N-1)(N-2)}{2\cdot 3}\,2^{N-3}\,. \end{aligned}$$

Observando detalladamente las cuatro fórmulas para $M(N,j)$ con $j=0$, 1, 2 y 3, podemos inferir la expresión general (es decir, para cualquier j):

$$\begin{aligned} M(N,j) &= \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-j+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots j}\,2^{N-j} \\ &= \frac{N!}{(N-j)!\,j!}\,2^{N-j} = \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} 2^{N-j}\,, \end{aligned}$$

donde se ha usado la notación usual de factorial $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$, con $0!\equiv 1$, y el símbolo combinatorio.

Es bien conocida la relación que existe entre el símbolo combinatorio y el *triángulo de Pascal.* El triángulo de Pascal es un conjunto de enteros ordenados en forma de triángulo que puede obtenerse como sigue:

i) Construya primero un "triángulo" usando números 1 y asteriscos $*$ como se muestra en la figura 4.

ii) Luego, empezando por arriba, reemplace cada asterisco por la suma de los dos números vecinos al asterisco que están ubicados en la fila superior. De esta manera se obtiene el triángulo de Pascal, mostrado en la figura 5.

```
              1
            1   1
          1   *   1
        1   *   *   1
      1   *   *   *   1
    1   *   *   *   *   1
  1   *   *   *   *   *   1
1   *   etc .....
```

Figura 4

```
                              j=0
                                 j=1
N=0                        1         j=2
N=1                     1     1          j=3
N=2                  1     2     1           j=4
N=3               1     3     3     1            j=5
N=4            1     4     6     4     1             j=6
N=5         1     5    10    10     5     1
N=6      1     6    15    20    15     6     1
N=7   1     7   . . . . . . .
```

Figura 5

Enumeremos las diagonales que van desde arriba a la derecha hacia abajo a la izquierda con los enteros $j = 0, 1, 2$, etc. El número del triángulo de Pascal que está ubicado en la fila N y la diagonal j es precisamente igual a

$$\frac{N!}{(N-j)!\,j!} = \binom{N}{j} .$$

Para obtener un triángulo que contenga los números $M(N,j)$ debemos multiplicar a los números del triángulo de Pascal por 2^{N-j}. Observe que son los números que están en las "diagonales" que van de arriba-izquierda hacia abajo-derecha los que mantienen $(N-j)$ constante. Multipliquemos los números de la primera de estas diagonales por $2^0 = 1$, los de la segunda diagonal por $2^1 = 2$, los de la tercera diagonal por $2^2 = 4$, los de la cuarta diagonal por $2^3 = 8$, etc. De esta manera se obtiene el triángulo de números que sigue:

```
                               j=0
                                  j=1
N=0                         1         j=2
N=1                      2     1          j=3
N=2                   4     4     1           j=4
N=3                8    12     6     1            j=5
N=4            16    32    24     8     1             j=6
N=5         32    80    80    40    10     1
N=6      64   192   240   160    60    12     1
N=7  132   etc. . . . . . .
```

Figura 6

Este triángulo consiste precisamente de los números $M(N,j)$. Por ejemplo la fila $N = 3$ da las propiedades del cubo ordinario en nuestro espacio habitual de tres dimensiones; en efecto, tal cubo tiene 8 vértices, 12 aristas, 6 caras y 1 volumen.

Hemos encontrado muchas propiedades de los "cubos" que viven en 4 y más dimensiones. En particular, para el hipercubo en 4 dimensiones (quinta fila de la figura 6) hemos encontrado que tiene 16 vértices, 32 aristas, 24 caras, 8 volúmenes y 1 "hipervolumen". Es imposible imaginarse a un hipercubo en 4 dimensiones pues, como ya hemos dicho, no tenemos experiencia de objetos que viven en espacios de dimensiones mayores que 3. Sin embargo, existen representaciones gráficas de un hipercubo que nos permiten tener cierto acercamiento a él.

Para simplificar la discusión que sigue indicaremos con un subíndice la dimensión en la que vive cierto cubo. Por ejemplo, un cubo_3 será el cubo convencional en $N = 3$ dimensiones; al hipercubo que vive en $N = 4$ dimensiones lo denotaremos por cubo_4.

La figura 3 corresponde a una proyección de un cubo_3 en un plano (o sea, en un espacio de dos dimensiones). Estamos muy acostumbrados a ver esa representación, y, al observarla, en forma inmediata la asociamos con un cubo_3, a pesar de que esta proyección de un cubo_3 en un plano introduce numerosas distorsiones. En efecto, sabemos que todas las aristas de un cubo tienen el mismo largo. En la proyección en perspectiva del cubo en dos dimensiones, sin embargo, no todas las aristas parecen tener el mismo largo. Asimismo, en todo cubo el ángulo entre aristas que se tocan es siempre de 90°. En la figura 3 no todas las aristas que se tocan muestran ángulos de 90°. O sea, al proyectar un figura geométrica de tres dimensiones en un plano, necesariamente se introducirán ciertas distorsiones en el gráfico. Estas distorsiones se incrementan al tratar de representar una figura que vive en un espacio de cuatro dimensiones en un plano.

Habiendo hecho esta advertencia mostramos en la figura 7 la proyección en un plano de un cubo_4. No es difícil identificar casi todas las características geométricas del hipercubo. Se ven los 16 vértices y las 32 aristas. También se observa que a cada vértice llegan 4 aristas.

Algo más difícil es identificar las 24 caras; para ayudar a identificarlas indicamos algunas de ellas (rotulándolas de acuerdo a sus cuatro vértices): aABb, AaeE, efgh, adDA, etc. Algunas de estas caras no parecen ser cuadradas. Recordemos, sin embargo, que eso se debe a las distorsiones introducidas por la proyección. Observe que a cada arista llegan tres caras.

Más difícil es identificar los 8 cubos. Éstos son (indicando los 8 vértices del cubo): abcdefgh, bBCcfFGg, cCDdgGHh, dDAahHEe, aABbeEFf, efghEFGH, abcdABCD y ABCDEFGH. Observe que cada cara es compartida por dos volúmenes. Por ejemplo, la cara ABFE es compartida por los cubos aABbeEFf y ABCDEFGH.

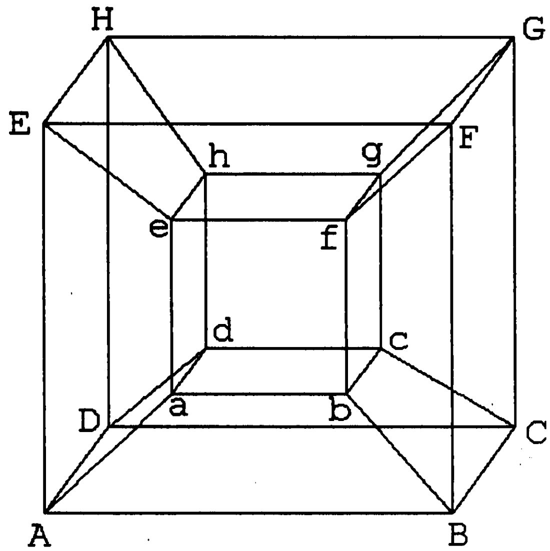

Figura 7

Otra forma (aunque menos útil) de visualizar en un espacio de menor dimensión a una estructura geométrica consiste en desplegarla. La figura 8 muestra este despliege (en un plano) de un $cubo_3$. Se observan sus 6 caras cuadradas.

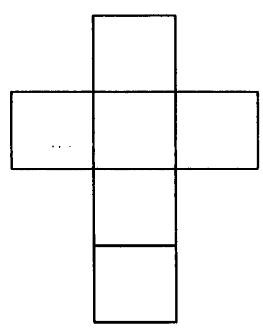

Figura 8

También podemos hacer un despliege de un $cubo_4$ en un espacio de dimensión 3. Lo que en ese caso se observa son 8 cubos adosados uno al otro.

La pintura de Salvador Dalí titulada "*Corpus hipercubus*", presentada al inicio del presente artículo, muestra a Cristo crucificado en un despliege tridimensional de un $cubo_4$. El original de este óleo, pintado en 1954, se encuentra en el *Metropolitan Museum of Art* de Nueva York.

N.R.: El Profesor Herbert Massmann obtuvo su PhD en la Universidad de California (Berkeley) en el año 1975. En la actualidad es Profesor Titular de la Universidad de Chile e investigador en el campo de la Física Nuclear teórica.