LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

Luis E. Jobet Bourquez
Universidad La República

Los griegos fueron capaces de construir un cuadrado de superficie equivalente a un polígono dado.

Comencemos mostrando cómo construyeron un cuadrado de superficie equivalente a un rectángulo dado (figura 1). Esta transformación se representa por la ecuación $x^2 = a \cdot b$.

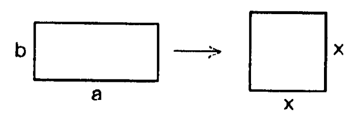

Figura 1

Esta ecuación se construye con regla y compás de la siguiente manera: Construya un trazo de largo $a + b$, siendo H el punto en que se unen ambos trazos. Ubique el centro O del trazo $a + b$. Luego construya un semicírculo con centro en O y radio $R = (a + b)/2$. Ahora construya la perpendicular al trazo $a+b$ que pasa por H.

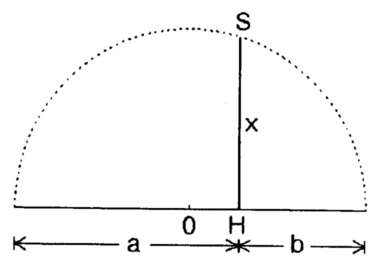

Figura 2

Sea S el lugar donde esta recta intersecta al semicírculo. De acuerdo con el teorema de Tales, $\overline{HS}^2 = a \cdot b$, o sea, $x = \overline{HS}$ es el lado del cuadrado equivalente en área al rectángulo de lados a y b. Se dice que el trazo x es la *media proporcional* entre los trazos a y b.

Usando casi el mismo procedimiento se puede transformar cualquier triángulo (ver figura 3) en un cuadrado de área equivalente. El lado del cuadrado vendrá dado por la media proporcional de la mitad de un lado y la *altura*. Algebraicamente lo anterior es equivalente a encontrar x tal que

$$x^2 = \frac{1}{2} c \cdot h \ .$$

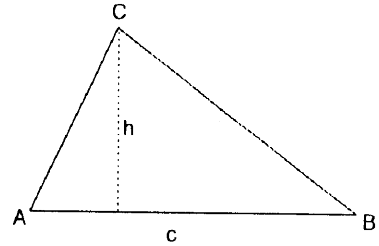

Figura 3

Es fácil transformar un cuadrilátero $ABCD$ en un triángulo AED. Para ello basta trazar la paralela EC a la línea que pasa por B y D (ver figura 4). En efecto, los triángulos DBC y DBE tienen la misma base y la misma altura (por consiguiente también la misma área).

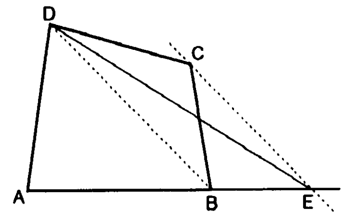

Figura 4

Es evidente que usando este procedimiento en forma reiterada se puede transformar un pentágono arbitrario en un cuadrilátero y luego éste en un triángulo. Generalizando, cualquier figura rectilínea con N lados puede transformarse, con regla y compás, sucesivamente en figuras rectilíneas con $N-1$, $N-2$, etc. lados, hasta transformarla en un triángulo con área equivalente. Éste, a su vez, tal como ya hemos mencionado, se puede finalmente transformar en un cuadrado.

Podemos preguntarnos: si cualquier figura rectilínea se puede transformar en un cuadrado con superficie equivalente, ¿por qué no tratar de hacerlo con un figura curvilínea?

Intentémoslo con la figura curva más simple, el círculo. Tratemos de encontrar un cuadrado de superficie equivalente a un círculo de radio unitario. Algebraicamente el problema lleva a la ecuación $x^2 = \pi R^2 = \pi$, o sea, el lado del cuadrado x es la media proporcional entre π y 1. Esta media se construye tal como se mostró en la figura 2, con $a = \pi$ y $b = 1$.

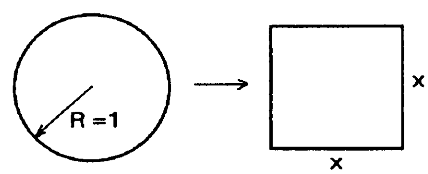

Figura 5

El problema se reduce a determinar, con regla y compás, la longitud π. Ésta es la condición primordial para resolver el problema en forma geométrica.

Recordemos que la regla es un instrumento que sirve para trazar líneas rectas, no para medir longitudes, mientras que el compás sirve para trazar círculos con centros diferentes y de cualquier radio. Para resolver un problema en *forma geométrica*, estos instrumentos deben ser utilizados un número finito de veces.

En la historia de las Matemáticas se pueden definir tres épocas bien precisas del intento de construir geométricamente el número π o para determinar su valor exacto.

Primer período. Éste abarca desde los antiguos tiempos griegos (siglo IV A.C) hasta mediados del siglo XVII D.C. Este período se caracteriza por ingeniosos intentos de encontrar el valor de π por métodos puramente geométricos (con regla y compás).

Arquímedes (287–212 A.C.), el más grande de los antiguos matemáticos, calculó π como límite de polígonos regulares circunscritos e inscritos en una circunferencia. Usó polígonos hasta de 96 lados y llegó a encerrar π entre los valores

$$3{,}1428571 = 3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71} = 3{,}140845 \ .$$

Ludolph van Ceulen en el siglo XVI llegó a calcular π con 17 decimales, valor numérico que en Alemania aún es llamado *número de Ludolph.* En el año 1621, el matemático Snell evaluó π con 35 decimales, usando para ello polígonos regulares (inscritos y circunscritos) de 2^{30} lados.

Segundo período. Comienza en el siglo XVIII. Con la ayuda del Análisis Matemático (Cálculo) recientemente inventado, grandes matemáticos como Fermat (1601–1667), Wallis (1616–1703), Newton (1642–1727), Leibnitz (1646–1716) y Euler (1707–1783), se dedican a trabajar en el problema de la cuadratura del círculo. Como resultado de estos estudios se descubrieron varias fórmulas que permitían expresar, de una u otra manera, el valor de π como series infinitas, productos de términos y fracciones continuas.

El matemático francés François Viète (1540–1603) obtuvo la primera fórmula digna del honorable número π:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}}} \cdots$$

El matemático irlandés Brouncker obtuvo

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

El matemático inglés John Wallis determinó que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdots} \, ,$$

mientras que Gottfried Leibnitz encontró la expresión

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \ .$$

Estos esfuerzos, aunque acrecentaban la precisión de π, no revelaban la naturaleza profunda del significado de este enigmático número. Parecía curioso que π, cuyo origen es puramente geométrico, pudiese ser calculado a partir de fracciones continuas y de series y productos infinitos, expresiones que tienen aparentemente pocos contactos con la Geometría. Esto fue una fuente de gran asombro y llegó a ser un gran estímulo para la actividad matemática.

El matemático Johann Lambert (1728–1777), en el año 1761, logró demostrar que π era un número irracional, es decir, no se podía representar como un cuociente a/b de dos números enteros. A pesar de este avance sustancial en el conocimiento sobre la naturaleza del número π, el problema fundamental sobre la cuadratura del círculo permaneció sin resolverse, ya que hay muchos números irracionales que se pueden construir con regla y compás. Por ejemplo, la diagonal de un cuadrado de lados unitarios vale $\sqrt{2}$, un número irracional.

También es interesante mencionar que Euler descubrió la relación

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,.$$

Es una de las más asombrosas y sin duda la más hermosa de todas las Matemáticas. En una ecuación combina de manera elegante todos los números más importantes de esta ciencia exacta: el 0, 1, e, $i = \sqrt{-1}$ y el número π.

Auténticos matemáticos se han entretenido buscando, por medio de tanteos bien orientados, soluciones geométricas aproximadas que permitan "cuadrar" el círculo sólo con regla y compás. (N.R.: Ver también artículo del profesor del Pino, que aparece en esta misma Revista.) En el año 1685 el matemático Adam Kochansky dio a conocer un procedimiento que permite construir aproximadamente el número π. La construcción geométrica, que aproxima π de manera excelente, es como sigue (ver figura 6):

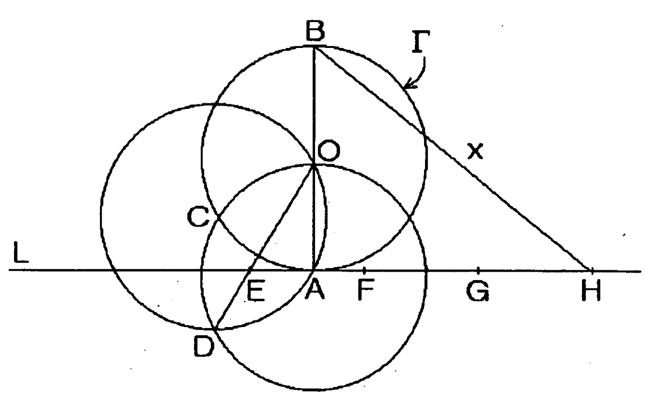

Figura 6

Sea Γ un círculo unitario, $\overline{AB}$ un diámetro de Γ y L una recta tangente que pasa A. Se dibuja un círculo con radio unitario y centro en A. Este círculo corta a Γ en C. Se dibuja un tercer círculo, también de radio unitario y con centro en C. El tercer círculo corta al segundo en D. Luego se traza una recta que una O con D. Esta recta corta L en E. A partir de E copiamos la unidad 3 veces a lo largo de L, obteniéndose los puntos F, G y H. Finalmente se une B con H. El largo del trazo $\overline{BH}$ es una muy buena aproximación de π.

Demostración: El ángulo $\sphericalangle EOA = 30°$ y $\overline{AO} = 1$, luego $\overline{AE} = 1/\sqrt{3}$. De lo anterior se deduce que $\overline{AH} = \overline{EH} - \overline{EA} = 3 - 1/\sqrt{3}$. Finalmente, por el teorema de Pitágoras,

$$\overline{BH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AB}^2 = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2^2 ,$$

o sea,

$$x = \overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}14153\ldots \quad ,$$

valor que discrepa del verdadero valor de π recién en la sexta cifra significativa. La magnitud x encontrada es un número irracional pero no trascendente, ya que es solución de una ecuación algebraica. Para encontrar esa ecuación podemos proceder como sigue:

$$x = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \ ,$$

$$x^2 = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \ ,$$

$$3x^2 - 40 = -6\sqrt{3} \ ,$$

de donde finalmente

$$9x^4 - 240x^2 + 1492 = 0 \ .$$

Tercer período. A partir de principios del siglo XIX, con el desarrollo del Análisis moderno, se pudo atacar el problema de la trascendencia de π con éxito.

El matemático francés Charles Hermite (1822–1901) demostró en 1873 que el número e no podía ser raíz de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, es decir, que e era *trascendente*. En el año 1900, cuando el concepto de número trascendente era introducido, los matemáticos no eran capaces de probar que cualquier número conocido fuera trascendente. Se avanzó lentamente. El matemático francés

Joseph Liouville (1809–1882), por ejemplo, demostró que todo número de la forma

$$\frac{a_1}{10!} + \frac{a_2}{10^{2}!} + \frac{a_3}{10^{3}!} + \frac{a_4}{10^{4}!} + \cdots ,$$

donde a_i son enteros cualesquiera tales que $1 \leq a_i \leq 9$, era un número trascendente. El número π, sin embargo, no estaba incluido entre ellos. Posteriormente, en 1880, el gran matemático Georg Cantor (1845–1918) demostró que casi todos los números reales son trascendentes.

El punto final del problema de la *cuadratura del círculo* fue puesto por el matemático alemán Ferdinand Lindemann (1852–1939) en una memoria publicada en 1882. Usando la relación encontrada por Euler y guiándose por el método señalado por Hermite, logra demostrar que π es trascendente. Con esto toda esperanza de poder construir π con regla y compás se desvanece, y lo más a que se puede aspirar son soluciones aproximadas, como la elegante construcción que Kochansky dio en el año 1685.

Referencias:

1. *Famous problems of geometry and how to solve them*, B. Bold, Ed. Dover, Inc., New York, 1969.
2. *Historia de las Matemáticas*, J. P. Colette, Siglo XXI S.A., 1991.
3. *Routes et dédales*, A. Dahan-Dalmedico y J. Peiffer, París-Montreal, 1982.
4. *Les mathématiques et l'imagination*, E. Kasner y J. Newman, Payot, París, 1970.
5. *The thirteen books of Elements*, T. Heath, Ed. Dover, New York, 1965.
6. *History of Mathematics*, Ed. Ginn, Boston, 1925.
7. *A manual of Greek Mathematics*, Ed. Dover, New York, 1963.

N.R.: Luis E. Jobet Bourquez tiene los títulos de profesor de Matemáticas y Física, y además de Ingeniero Civil, todos ellos obtenidos en la Universidad de Chile. En la actualidad es profesor de Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico en la Universidad La República.