MULTIPLICACIÓN RUSA: UNA APLICACIÓN COTIDIANA DE NÚMEROS BINARIOS

Roberto Hojman
Facultad de Ciencias, Universidad de Chile

Fernando Betancourt
4º Medio M (1995), Instituto Nacional

Introducción

Algunos pueblos de la antigua Rusia multiplicaban números de modo muy pintoresco. Lo interesante es que para realizar la operación no es necesario conocer las tablas de multiplicar, sino que basta saber solamente sumar, multiplicar por 2 y dividir por 2.

El método

La manera de proceder es la siguiente: colocaban (como es usual) los factores frente a frente y bajo cada uno de ellos una columna, cuyos casilleros se completaban del siguiente modo: en la primera columna, ponían sucesivamente, hacia abajo, la parte entera de la mitad del número inmediatamente superior, hasta llegar a 1. En la otra, el doble del número inmediatamente superior hasta llenar el casillero vecino al 1 de la primera columna.

Un ejemplo ayuda a entenderlo mejor. Vamos a hacer uso del mecanismo descrito para multiplicar 52 por 23:

		X	Y	
♠	El multiplicando es	**52**	**23**	Es el multiplicador
♠	La mitad de 52	26	46	El doble de 23 (2 Y)
	La mitad de 26	13	92	El doble de 46 (4 Y)
♠	La parte entera de 13/2	6	184	etc.
	La mitad de 6	3	368	
	La parte entera de 3/2	1	736	

En seguida se eliminan las filas de la tabla que en la columna X contengan un número par (marcadas con ♠):

X	Y	Y'
~~52~~	~~23~~	
~~26~~	~~46~~	
13	92	92
~~6~~	~~184~~	
3	368	368
1	736	736
		1196

El resultado de $52 \cdot 23$ es la suma de los números *sobrevivientes* (Y') de la columna Y:

$$92 + 368 + 736 = 1196$$

Una justificación del método

Consideremos primero el caso especial de $16 \cdot 13$ y procedamos a realizar la operación dividiendo el primero de los factores por 2 y multiplicando el otro por 2, y repitiendo el proceso hasta que el primer factor sea 1:

$$16 \cdot 13 = 8 \cdot 26 = 4 \cdot 52 = 2 \cdot 104 = 1 \cdot 208 = \mathbf{208}\ .$$

Si hubiéramos usado el procedimiento referido en la introducción, la tabla correspondiente luciría así:

X	Y
~~16~~	~~13~~
~~8~~	~~26~~
~~4~~	~~52~~
~~2~~	~~104~~
1	208

Se han tachado todas las filas que en la columna X contienen un número par y el resultado es 208, como se esperaba.

Aquí el proceso se entiende claramente y es particularmente simple porque 16 es una potencia de 2: al realizar las sucesivas divisiones por 2 el resultado es siempre un número entero.

Si queremos multiplicar 22 y 13 por el método reseñado nos vamos a encontrar con números decimales que complican el cálculo:

$$22 \cdot 13 = 11 \cdot 26 = 5{,}5 \cdot 52 = 2{,}75 \cdot 104 = 1{,}375 \cdot 208 = ?$$

El procedimiento ruso modifica la estrategia cada vez que aparece como multiplicando un número impar.

Para evitar la aparición de decimales escribimos:

$$11 \cdot 26 = (10 + 1) \cdot 26 = 10 \cdot 26 + \mathbf{26} \ .$$

Conservamos el término en negrita y nos preocupamos de $10 \cdot 26$, que escribimos como $5 \cdot 52$. Si repetimos el proceso se generaría un número decimal. Lo evitamos del mismo modo:

$$5 \cdot 52 = (4 + 1) \cdot 52 = 4 \cdot 52 + \mathbf{52} \ .$$

Guardamos el 52 y nos preocupamos de $4 \cdot 52$, que escribimos como $2 \cdot 104$ y $1 \cdot 208 = \mathbf{208}$, y así sucesivamente.

El resultado final es la suma de los números resaltados en negrita:

$$26 + 52 + 208 = \mathbf{286} \ .$$

Una justificación más formal

Para entender de un modo general por qué el método funciona, consideremos dos números enteros cualesquiera, X e Y.

Siempre es posible expresar X como una serie de potencias de 2:

$$X = x_0 2^0 + x_1 2^1 + x_2 2^2 + x_3 2^3 + \cdots + x_n 2^n \ ,$$

donde los coeficientes x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sólo pueden tomar los valores 0 ó 1. (Notar que la descomposición equivale a la representación binaria del número X.)

Entonces

$$XY = (x_0 2^0 + x_1 2^1 + x_2 2^2 + x_3 2^3 + \cdots + x_n 2^n) \cdot Y \ . \qquad (1)$$

Observamos que efectivamente el producto XY resulta ser una suma de términos de la forma $2^k Y$. Examinemos qué valores del exponente k deben considerarse.

Si X es impar, necesariamente $x_0 = 1$ (la suma de los términos siguientes es par, puesto que 2 es un factor común) y el primer término de la serie del segundo miembro de (1) será Y. En cambio, si X es par, $x_0 = 0$.

A continuación, para decidir cuánto vale x_1, dividimos X por 2 y tomamos la parte entera del resultado:

$$\left[\frac{X}{2}\right] = x_1 2^0 + x_2 2^1 + x_3 2^2 + x_4 2^3 + \cdots + x_n 2^{n-1} \ ,$$

donde el paréntesis cuadrado [ ] indica que se debe considerar la parte entera de dividir X entre 2.

Si $[X/2]$ resulta un número impar, es porque $x_1 = 1$ y en la serie (1) aparecerá $2^1 Y$. Si, en cambio, el resultado es par, x_1 es nulo.

El siguiente paso es enteramente análogo al anterior. Se reitera la división por 2 del resultado obtenido y se estudia su parte entera:

$$\left[\frac{\left[\frac{X}{2}\right]}{2} \right] = x_2 2^0 + x_3 2^1 + x_4 2^2 + \cdots + x_n 2^{n-2} \ .$$

Si el número resultante es impar, ello implica que $x_2 = 1$ y en la serie (1) aparecerá $2^2 Y$. Si es par, $x_2 = 0$ y el término $2^2 Y$ no contribuirá.

En resumen, el resultado de la multiplicación de X por Y es una suma de términos de la forma Y, $2Y$, $4Y$, etc. Si X es impar (par), el resultado de la multiplicación (no) contendrá Y. Si en la primera división al tomar la parte entera se obtiene un número impar, el resultado contendrá $2Y \ldots$ y así sucesivamente.

Generalización

En este nivel cabe hacerse una pregunta: si el esquema propuesto puede ser justificado por la descomposición de uno de los factores en potencias de 2, ¿es posible diseñar un método que haga uso de la descomposición de uno de los factores en potencias de un entero $n \neq 2$?

Responderemos la interrogante para $n = 3$ y veremos que las conclusiones para el caso más general fluyen directamente.

En esta oportunidad, X puede escribirse como:

$$X = x_0 3^0 + x_1 3^1 + x_2 3^2 + x_3 3^3 + \cdots + x_n 3^n \ .$$

Los coeficientes de la expansión x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pueden tomar esta vez los valores 0, 1 ó 2.

$$XY = (x_0 3^0 + x_1 3^1 + x_2 3^2 + x_3 3^3 + \cdots + x_n 3^n) \cdot Y \ .$$

Si X es divisible exactamente por 3, entonces $x_0 = 0$. $x_0 = 1$ ó $x_0 = 2$ si X es divisible por 3 con resto 1 ó 2, respectivamente: en el primer caso, en el producto XY aparecerá Y; en el segundo, $2Y$.

En seguida se estudia de un modo análogo la parte entera de $X/3$. Si $[X/3]$ es exactamente divisible por 3, no aparece $3Y$. Si al dividir por 3 el resto es 1, hay una contribución de $3Y$. Si el resto es 2, el aporte es $2 \cdot 3Y$.

Desarrollemos un ejemplo para ilustrar el método:

			Resto	Aporte	
	46	**21**	**1**	$21 \cdot \mathbf{1} =$	21
$[46/3] =$	15	$21 \cdot 3$	**0**	$3 \cdot 21 \cdot \mathbf{0} =$	0
$[15/3] =$	5	$21 \cdot 3 \cdot 3$	**2**	$3 \cdot 3 \cdot 21 \cdot \mathbf{2} =$	378
$[5/3] =$	1	$21 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	**1**	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 21 \cdot \mathbf{1} =$	567
$[1/3] =$	0				**966**

Discusión

El método descrito en la introducción es interesante en el sentido que no involucra el conocimiento de las tablas de multiplicar. Simplemente conociendo la multiplicación y división por 2 permite encontrar el resultado correcto.

Mientras la utilidad práctica del procedimiento que originó esta nota es evidente, la generalización que exhibimos (dividiendo y multiplicando por 3), si bien es matemáticamente válida, debe considerarse—por el momento—sólo como un ejercicio interesante.

Nota. El trabajo expuesto es el primero de una serie de artículos que son la memoria de reuniones semanales de los autores durante el año lectivo 1995. En ellas se discutían problemas de Matemática y Física, directamente relacionados con temas contenidos en los programas de la educación media, pero intentando buscar un acercamiento integrador.

Habitualmente uno de los autores proponía un problema que le había parecido interesante y se abordaba desde distintos puntos de vista, durante una o más sesiones.

En ocasiones el problema era exhibido a los compañeros de curso de uno de los autores (FB) en la etapa de análisis en que se encontraba, donde su planteamiento y/o resolución suscitaba polémica y muchas veces aportaba elementos de discusión adicionales. Les estamos muy agradecidos.

Cuando se lograba una solución acabada y que nos parecía que podía contribuir al entendimiento de la situación estudiada, era resumida en la forma del presente artículo.

N.R.: Roberto Hojman obtuvo su Doctorado en la Universidad de Trieste, Italia, en el año 1980. En la actualidad es Profesor Asociado de la Universidad de Chile e investigador en el área de Relatividad General.

Fernando Betancourt, ex-alumno del Instituto Nacional, es actualmente alumno de primer año en la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile.

Juegos

1. Dos personas realizan en un poliedro regular K, con todas sus caras numeradas diferentes, el siguiente juego. Uno de los jugadores elige primero un vértice de K, mientras que el otro a continuación debe elegir n caras. Enseguida el primer jugador le dice al segundo cuáles de esas n caras contienen al vértice escogido. El objetivo del juego es que el segundo jugador debe adivinar el vértice escogido por el primer jugador.
   ¿Cuál es el menor valor posible de n que permitiría siempre adivinar correctamente el vértice si K es un dodecaedro (12 caras)? ¿Y si es un icosaedro (20 caras)?

2. Puzzle Policial.

   Un reconocido matemático es asesinado por un colega durante la noche. La lista de 6 sospechosos está compuesta por 3 algebristas y 3 analistas. No se sabe quién es quién. Eso sí, se sabe que los algebristas siempre dan un número impar de afirmaciones verdaderas y los analistas, por su parte, siempre dan un número par de afirmaciones verdaderas. Las afirmaciones de cada sospechoso A, B, C, D, E, F son las siguientes:

   A: Yo soy analista; D y F son analistas; B y E son algebristas.

   B: Yo no cometí el asesinato; C y F son de la misma área; el asesino es un analista.

   C: Yo soy algebrista; yo no cometí el asesinato; F no cometió el asesinato.

   D: Yo no cometí el asesinato; B no cometió el asesinato; E es un analista.

   E: A lo mató; B lo mató; F lo mató.

   F: C es un analista; B es el asesino; estuvimos con A y D conversando toda la noche.

   Determinar quiénes son los algebristas, quiénes los analistas y quién es el asesino.

3. ¿Es posible cubrir completamente una mesa cuadrada de un metro por lado con dos manteles redondos de 1,10 metros de diámetro cada uno?

(Continúa en la página 33.)